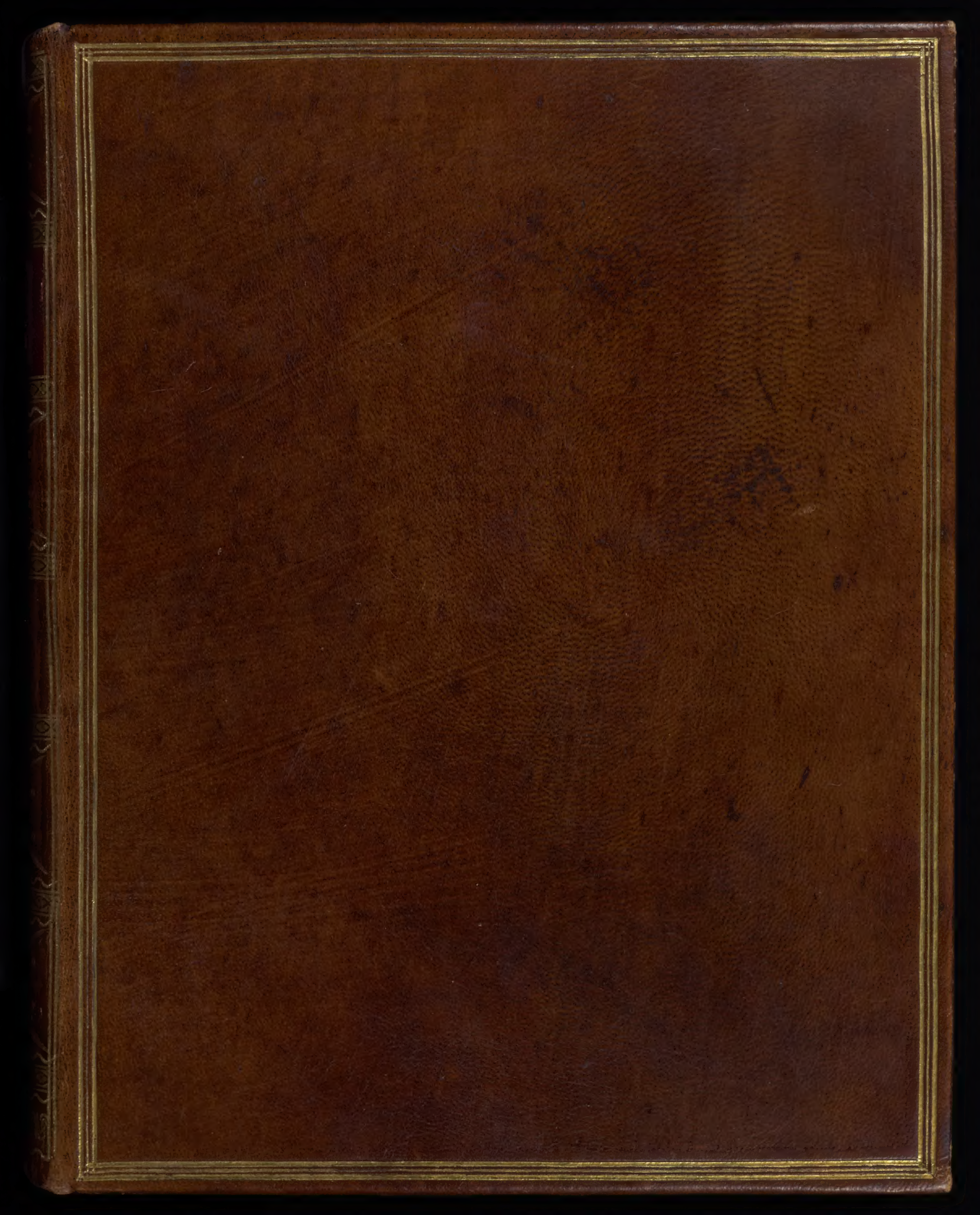


TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE.

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE.

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE,

PAR P. S. LAPLACE,

Membre du Sénat conservateur, de l'Institut national, et du Bureau des Longitudes de France; des Sociétés royales de Londres et de Gottingue; des Académies des Sciences de Russie, de Danemarck, d'Italie, etc.

TOME TROISIÈME.

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.

A PARIS,

Chez J. B. M. DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins.

AN XI — 1802.

A

BONAPARTE,

DE L'INSTITUT NATIONAL.

CITOYEN PREMIER CONSUL,

Vous m'avez permis de vous dédier cet ouvrage. Il m'est doux et honorable de l'offrir au Héros pacificateur de l'Europe, à qui la France doit sa prospérité, sa grandeur et la plus brillante époque de sa gloire; au Protecteur éclairé des sciences, qui formé par elles voit dans leur étude, la source des plus nobles jouissances, et dans leurs progrès, le perfectionnement de tous les arts utiles et des

institutions sociales. Puisse cet ouvrage consacré à la plus sublime des sciences naturelles, être un monument durable de la reconnoissance que votre accueil et les bienfaits du Gouvernement inspirent à ceux qui les cultivent ! De toutes les vérités qu'il renferme, l'expression de ce sentiment sera toujours pour moi, la plus précieuse.

Salut et respect,

LAPLACE.

PRÉFACE.

Nous avons donné dans la première partie de cet ouvrage, les principes généraux de l'équilibre et du mouvement de la matière. Leur application aux mouvemens célestes, nous a conduits sans hypothèses et par une série de raisonnemens géométriques, à la loi de la gravitation universelle dont la pesanteur et les mouvemens des projectiles sur la terre, ne sont que des cas particuliers. En considérant ensuite un système de corps soumis à cette grande loi de la nature; nous sommes parvenus, au moyen d'une analyse singulière, aux expressions générales de leurs mouvemens, de leurs figures et des oscillations des fluides qui les recouvrent; expressions d'où l'on a vu découler tous les phénomènes observés du flux et du reflux de la mer, de la variation des degrés et de la pesanteur à la surface terrestre, de la précession des équinoxes, de la libration de la lune, de la figure et de la rotation des anneaux de Saturne, et de leur permanence dans le plan de son équateur. Nous en avons déduit les principales inégalités des planètes, et spécialement celles de Jupiter et de Saturne, dont la période embrasse plus de neuf cents années, et qui n'offrant aux observateurs, que des anomalies dont ils ignoroient les loix et la cause, ont paru long-temps faire exception de la théorie de la pesanteur : plus approfondie, elle les a fait connoître, et maintenant ces inégalités en sont une des preuves les plus frappantes. Nous avons développé les variations des élémens du système planétaire, qui ne se rétablissent qu'après un très-grand nombre de siècles. Au

milieu de tous ces changemens, nous avons reconnu la constance des moyens mouvemens et des distances moyennes des corps de ce système que la nature semble avoir disposé primitivement pour une éternelle durée, par les mêmes vues qu'elle nous paroît suivre si admirablement sur la terre, pour la conservation des individus et la perpétuité des espèces. Par cela seul que ces mouvemens sont dirigés dans le même sens et dans des plans peu différens, les orbes des planètes et des satellites doivent toujours être à-peu-près circulaires et peu inclinés les uns aux autres. Ainsi, la variation de l'obliquité de l'écliptique à l'équateur, renfermée constamment dans d'étroites limites, ne produira jamais un printemps perpétuel sur la terre. Nous avons prouvé que l'attraction du sphéroïde terrestre, ramenant sans cesse vers son centre l'hémisphère que la lune nous présente, transporte au mouvement de rotation de ce satellite, les grandes variations séculaires de son mouvement de révolution, et dérobe pour toujours l'autre hémisphère à nos regards. Enfin, nous avons démontré sur les mouvemens des trois premiers satellites de Jupiter, ce théorême remarquable ; savoir, qu'en vertu de leur action mutuelle, la longitude moyenne du premier vu du centre de Jupiter, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, est exactement et constamment égale à deux angles droits, en sorte qu'ils ne peuvent jamais être à-la-fois éclipsés. Il nous reste à considérer particulièrement les perturbations du mouvement des planètes et des comètes autour du soleil, de la lune autour de la terre, et des satellites autour des planètes qu'ils accompagnent. C'est l'objet de la seconde partie de cet ouvrage, spécialement consacrée à la perfection des tables astronomiques.

Les

Les tables ont suivi les progrès de la science qui leur sert de base, et ces progrès ont d'abord été d'une extrême lenteur. Pendant très-long-temps, on ne considéra que les mouvemens apparens des astres : cet intervalle dont l'origine se perd dans la plus haute antiquité, et qui fut proprement l'enfance de l'astronomie, comprend les travaux d'Hypparque et de Ptolémée, et ceux des Indiens, des Arabes et des Perses. Le système de Ptolémée, qu'ils ont successivement adopté, n'est au fond qu'une manière de représenter les apparences célestes; et sous ce rapport, il fut utile à la science. Telle est la foiblesse de l'esprit humain, qu'il a souvent besoin de s'aider d'hypothèses, pour lier les faits entre eux. En bornant les hypothèses à cet usage, en évitant de leur attribuer une réalité qu'elles n'ont point, et en les rectifiant sans cesse par de nouvelles observations; on parvient enfin aux véritables causes, ou du moins, aux loix des phénomènes. L'histoire de la philosophie nous offre plus d'un exemple des avantages que peuvent ainsi procurer les hypothèses, et des erreurs auxquelles on s'expose en les réalisant. Vers le milieu du seizième siècle, Copernic en démêlant dans les apparences, les mouvemens réels de la terre autour du soleil et sur elle-même, montra sous un nouveau point de vue l'univers, et changea la face de l'astronomie. Un concours inoui de découvertes a rendu mémorable à jamais dans l'histoire des sciences, le siècle suivant, d'ailleurs illustré par tant de chef-d'œuvres en littérature et dans les beaux-arts. Kepler reconnut les loix du mouvement elliptique des planètes : le télescope trouvé par le plus heureux des hasards, et perfectionné aussi-tôt par Galilée, lui fit voir dans les cieux, de nouvelles inégalités et de nouveaux mondes : l'application que fit Huygens, du pendule aux horloges, et celle

des lunettes au quart de cercle, en donnant des mesures précises des angles et de la durée, rendirent sensibles, les plus petites inégalités des mouvemens célestes. En même temps que l'observation offroit à l'esprit humain de nouveaux phénomènes, il créa pour les expliquer et les soumettre au calcul, de nouveaux instrumens de la pensée. Néper inventa les logarithmes : l'analyse des courbes et la dynamique prirent naissance dans les mains de Descartes et de Galilée : Newton découvrit le calcul différentiel, décomposa la lumière, et s'éleva au principe général de la pesanteur. Dans le siècle qui vient de s'écouler, les successeurs de ce grand homme ont achevé l'édifice dont il avoit posé les fondemens. Ils ont perfectionné l'analyse infinitésimale, inventé le calcul aux différences partielles infiniment petites et finies, et réduit en formules, la mécanique entière. En appliquant ces découvertes, à la loi de la pesanteur, ils ont ramené à cette loi tous les phénomènes célestes, et donné aux théories et aux tables astronomiques, une précision inespérée dont on est sur-tout redevable aux travaux des Géomètres français, et aux prix proposés par l'Académie des Sciences. Si l'on joint à ces découvertes, celles de Bradley sur l'aberration des étoiles et sur la nutation de l'axe terrestre ; les mesures multipliées des degrés et du pendule, opérations dont la France a donné l'exemple en envoyant des Académiciens au nord, à l'équateur et dans l'hémisphère austral, pour y observer la grandeur de ces degrés et l'intensité de la pesanteur ; l'arc du méridien compris entre Dunkerque et Barcelone, déterminé par des opérations très-précises, et servant de base au système métrique le plus naturel et le plus simple ; les nombreux voyages entrepris pour connoître les diverses parties du globe, et pour observer les passages de Vénus sur le

soleil; la détermination exacte des dimensions du système solaire, fruit de ces voyages; la planète Uranus, ses satellites et deux nouveaux satellites de Saturne, reconnus par Herschel; enfin, si l'on réunit à toutes ces découvertes, l'invention admirable des instrumens à réflexion si utiles à la mer, et celles des lunettes acromatiques, du cercle répétiteur et des montres marines; le dernier siècle envisagé sous le rapport des progrès de l'esprit humain dans les sciences mathématiques, paroîtra digne de celui qui l'a précédé. Le siècle où nous entrons, a commencé sous les auspices les plus favorables à l'astronomie. Son premier jour a été remarquable par la découverte de la planète *Cérès*, suivie presque aussi-tôt de celle de la planète *Pallas* dont la moyenne distance au soleil est à très-peu-près la même. La proximité de ces deux corps d'une extrême petitesse à Jupiter, et la grandeur des excentricités et des inclinaisons de leurs orbes entrelacés, produisent dans leurs mouvemens, des inégalités considérables qui répandront un nouveau jour sur la théorie des attractions célestes, et donneront lieu de la perfectionner encore.

C'est principalement dans les applications de l'analyse au système du monde, que se manifeste la puissance de ce merveilleux instrument sans lequel il eût été impossible de pénétrer un mécanisme aussi compliqué dans ses effets, qu'il est simple dans sa cause. Le Géomètre embrasse maintenant dans ses formules, l'ensemble du système planétaire et de ses variations successives; il remonte par la pensée, aux divers états qu'il a subis dans les temps les plus reculés, et redescend à tous ceux que les temps à venir développeront aux observateurs. Il voit ce sublime spectacle dont la période embrasse des millions d'années, se

renouveller en peu de siècles, dans le systême des satellites de Jupiter par la promptitude de leurs révolutions, et produire de singuliers phénomènes entrevus par les Astronomes, mais trop composés ou trop lents pour qu'ils en aient pu déterminer les loix. La théorie de la pesanteur, devenue par tant d'applications, un moyen de découvertes aussi certain que l'observation elle-même, lui a fait connoître plusieurs inégalités nouvelles, et prédire le retour de la comète de 1759 dont l'action de Jupiter et de Saturne rend les révolutions très-inégales. Par ce moyen, il a su tirer des observations comme d'une mine féconde, un grand nombre d'élémens importans et délicats qui sans l'analyse, y resteroient éternellement cachés. Tels sont les valeurs respectives des masses du soleil, des planètes et des satellites, déterminées par les révolutions de ces différens corps et par le développement de leurs inégalités périodiques et séculaires ; la vîtesse de la lumière et l'ellipticité de Jupiter, données par les éclipses de ses satellites, avec plus de précision que par l'observation directe ; la rotation et l'applatissement d'Uranus et de Saturne, conclus de la position dans un même plan, des différens corps qui circulent autour de ces deux planètes. Tels sont encore les parallaxes du soleil et de la lune, et la figure même de la terre, déduites des inégalités lunaires ; car on verra dans la suite, que la lune par ses mouvemens, décèle à l'astronomie perfectionnée, la petite ellipticité du sphéroïde terrestre dont elle fit connoître la rondeur aux premiers Astronomes, par ses éclipses. Enfin, par une combinaison heureuse de l'analyse avec les observations, cet astre qui semble avoir été donné à la terre pour l'éclairer pendant les nuits, devient encore le guide le plus assuré du navigateur qu'il garantit des dangers auxquels

il fut exposé long-temps par les erreurs de son estime. La perfection de la théorie et des tables lunaires, à laquelle il doit ce précieux avantage et celui de fixer avec exactitude la position des objets qui s'offrent à sa vue, est le fruit des travaux des Géomètres et des Astronomes, depuis plus d'un demi-siècle : elle réunit tout ce qui peut donner du prix aux découvertes ; la grandeur et l'utilité de l'objet, la fécondité des résultats et le mérite de la difficulté vaincue. C'est ainsi que les théories les plus abstraites, en se répandant par de nombreuses applications, sur la nature et sur les arts, sont devenues d'inépuisables sources de biens et de jouissances pour celui même qui les ignore.

TABLE DES MATIÈRES

contenues dans le troisième volume.

THÉORIES PARTICULIÈRES DES MOUVEMENS CÉLESTES.

LIVRE VI.

THÉORIE DES MOUVEMENS PLANÉTAIRES.

CHAP.

LIVRE VII.

THÉORIE DE LA LUNE.

FIN DE LA TABLE DU TOME TROISIÈME.

TRAITE

SUPPLÉMENT

AU TRAITÉ

DE MÉCANIQUE CÉLESTE;

Présenté au Bureau des Longitudes, le 17 *Août* 1808.

MON objet, dans ce Supplément, est de perfectionner la théorie des perturbations planétaires, que j'ai présentée dans les second et sixième Livres de mon Traité de Mécanique Céleste. En cherchant à donner aux expressions des élémens des orbites, la forme la plus simple dont elles sont susceptibles; je suis parvenu à ne les faire dépendre que des différences partielles d'une même fonction, prises par rapport à ces élémens; et ce qui est remarquable, les coefficiens de ces différences, ne sont fonctions que des élémens eux-mêmes. Ces élémens sont les six arbitraires des trois équations différentielles du second ordre, qui déterminent le mouvement de chaque planète. En regardant son orbite, comme une ellipse variable à chaque instant; ils sont représentés, 1°. par le demi-grand axe, dont dépend le moyen mouvement de la planète; 2°. par l'époque de la longitude moyenne; 3°. par l'excentricité de l'orbite; 4°. par la longitude du périhélie; 5°. par l'inclinaison de l'orbite à un plan fixe; 6°. enfin, par la longitude de ses nœuds. M. Lagrange a donné depuis long-temps, à l'expression différentielle du grand axe, la forme dont je viens de parler; et il en a conclu d'une manière très-heureuse, l'invariabilité des moyens mouvemens, lorsque l'on n'a égard qu'à la première puissance des masses perturbatrices; invariabilité que j'ai reconnue le premier, en ne rejetant que les quatrièmes puissances des excen-

tricités et des inclinaisons, ce qui suffit aux besoins de l'Astronomie. J'ai donné dans le second Livre de la Mécanique Céleste, la même forme, aux expressions différentielles de l'excentricité de l'orbite, de son inclinaison et de la longitude de ses nœuds. Il ne restait donc qu'à donner la même forme, aux expressions différentielles des longitudes de l'époque et du périhélie: c'est ce que je fais ici.

Le principal avantage de cette forme des expressions différentielles des élémens, est de donner leurs variations finies, par le développement seul de la fonction que j'ai nommée R dans le second Livre de la Mécanique Céleste. En réduisant cette fonction, dans une série de cosinus d'angles croissans proportionnellement au temps; on obtient par la différentiation de chaque terme, les termes correspondans des variations des élémens. Je m'étais attaché à remplir cette condition, dans le second Livre de la Mécanique Céleste; mais on y satisfait d'une manière encore plus générale et plus simple, au moyen des nouvelles expressions de ces variations. Elles ont de plus l'avantage de mettre en évidence, le beau théorème auquel M. Poisson est parvenu sur l'invariabilité des moyens mouvemens, en ayant égard au carré des masses perturbatrices. Dans le sixième Livre de la Mécanique Céleste, j'ai prouvé au moyen d'expressions analogues, que cette uniformité n'est point altérée par les grandes inégalités de Jupiter et de Saturne; ce qui était d'autant plus important, que j'ai fait voir dans le même Livre, que ces grandes inégalités ont une influence considérable sur les variations séculaires des orbites de ces deux planètes. La substitution des nouvelles expressions dont je viens de parler, montre que l'uniformité des moyens mouvemens planétaires n'est troublée par aucune autre inégalité périodique ou séculaire. Ces expressions me conduisent encore à la solution la plus générale et la plus simple des variations séculaires des élémens des orbes planétaires. Enfin elles donnent avec une extrême facilité, les deux inégalités du mouvement lunaire en longitude et en latitude, qui dépendent de l'aplatissement de la terre, et que j'ai déterminées dans le second chapitre du septième Livre. Cette confirmation des résultats auxquels je suis parvenu sur cet objet, me paraît intéressante, en ce que leur comparaison avec les observations donne l'ellipticité de la terre, d'une manière au moins aussi précise, que les mesures directes avec lesquelles ils sont aussi

bien d'accord qu'il est possible de l'espérer, vu les irrégularités de la surface de la terre.

Dans la théorie des deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, que j'ai donnée dans le Livre VII, j'ai eu égard aux cinquièmes puissances des excentricités et des inclinaisons des orbites. M. Burckhardt avait calculé les termes dépendans de ces puissances. Mais j'ai reconnu depuis, que l'inégalité résultante de ces termes, avait été prise avec un signe contraire. Je rectifie donc à la fin de ces recherches, les formules des mouvemens de Jupiter et de Saturne, que j'ai présentées dans le chapitre VIII du dixième Livre. Il en résulte un léger changement dans les moyens mouvemens et les époques de ces deux planètes; et ce changement satisfait à l'observation qu'Ebn-Junis fit au Caire en l'an 1007, de leur conjonction mutuelle, observation qui ne s'écarte plus des formules, que d'une quantité beaucoup moindre que l'erreur dont elle est susceptible. Les observations anciennes citées par Ptolémée, sont également représentées par mes formules. Cet accord prouve que les moyens mouvemens des deux plus grosses planètes du système solaire, sont maintenant bien connus, et n'ont point éprouvé depuis Hipparque, d'altération sensible : il garantit pour long-temps, l'exactitude des Tables que M. Bouvard a construites d'après ma Théorie, et que le Bureau des Longitudes vient de publier.

Dans la même séance où j'ai présenté ces recherches au Bureau des Longitudes, M. Lagrange lui a pareillement communiqué de savantes recherches qui ont rapport à leur objet. Il y parvient par une analyse très-élégante, à exprimer la différence partielle de R, prise par rapport à chaque élément, par une fonction linéaire des différences infiniment petites de ces élémens, et dans laquelle les coefficiens de ces différences ne sont fonctions que des élémens eux-mêmes. En déterminant au moyen de ces expressions, les différences de chaque élément; on doit après les réductions convenables, retrouver les expressions très-simples auxquelles je suis parvenu, et qui tirées de méthodes aussi différentes, seront par là, confirmées.

1. Je reprends l'expression de ede, donnée dans le n° 67 du second

Livre du Traité de Mécanique Céleste. En faisant pour simplifier, $\mu = 1$, elle devient

$$ede = andt.\sqrt{1-e^2}.\left(\frac{dR}{dv}\right) - a.(1-e^2).\text{d}R.$$

Dans cette équation, t est le temps; nt est le moyen mouvement de la planète m; a est le demi-grand axe de son orbite; e en est l'excentricité; v est la longitude vraie de la planète; R est une fonction des coordonnées des deux planètes m et m', telle qu'en nommant x, y, z; x', y', z', ces coordonnées; on a

$$R = m'.\frac{(xx'+yy'+zz')}{r'^3}.-\frac{m'}{\rho},$$

ρ étant la distance mutuelle des deux planètes, et par conséquent étant égal à $\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$; r' est le rayon vecteur de la planète m', r étant celui de la planète m; enfin la caractéristique différentielle d se rapporte aux seules coordonnées de la planète m.

J'observe que l'on a $\left(\frac{dR}{dv}\right)$, en différentiant par rapport à nt, l'expression de R développée en série d'angles proportionnels au temps t, en la divisant par ndt, et en ajoutant à cette différentielle ainsi divisée, la différence partielle $\left(\frac{dR}{d\varpi}\right)$, ϖ étant la longitude du périhélie de l'orbite de m. En effet, on ne doit point dans la différence partielle de R, prise par rapport à v, avoir égard à l'angle nt, qu'introduit dans R, soit le rayon vecteur r de la planète m, soit la partie périodique de l'expression elliptique de v, développée en série de sinus d'angles proportionnels au temps; or dans ces fonctions, l'angle nt est toujours accompagné de l'angle $-\varpi$ qui n'est introduit dans R que de cette manière; en ajoutant donc à la différence partielle $\frac{\text{d}R}{ndt}$, la différence partielle $\left(\frac{dR}{d\varpi}\right)$, on aura la valeur de $\left(\frac{dR}{dv}\right)$. L'expression précédente de ede, donnera ainsi

$$de = \frac{a.\sqrt{1-e^2}}{e}.(1-\sqrt{1-e^2}).\text{d}R + \frac{a.\sqrt{1-e^2}}{e}.ndt.\left(\frac{dR}{d\varpi}\right).$$

On a ensuite par le n° 3 du Livre IX de la Mécanique Céleste,

$$d\varepsilon - d\varpi = -\frac{d\varpi.(1-e\cos.u)^2}{\sqrt{1-e^2}} - \frac{de.\sin.u.(2-e^2-e.\cos.u)}{1-e^2};$$

u est ici l'anomalie de l'excentrique, et ε est la longitude de l'époque. On peut mettre le second membre de l'équation précédente, sous cette forme :

$$-d\varpi.\sqrt{1-e^2}+\frac{ed\varpi}{\sqrt{1-e^2}}.(2\cos.u-e-e.\cos^2.u)-\frac{de.\sin.u}{1-e^2}.(2-e^2-e.\cos.u).$$

L'anomalie u de l'excentrique est donnée en fonction de l'anomalie vraie $v-\varpi$, au moyen des équations

$$r=\frac{a.(1-e^2)}{1+e\cos.(v-\varpi)}=a.(1-e\cos.u);$$

d'où l'on tire

$$\cos.u=\frac{e+\cos.(v-\varpi)}{1+e.\cos.(v-\varpi)}$$

$$\sin.u=\frac{\sqrt{1-e^2}.\sin.(v-\varpi)}{1+e.\cos.(v-\varpi)};$$

par conséquent

$$\frac{ed\varpi}{\sqrt{1-e^2}}.(2.\cos.u-e-e\cos^2.u)-\frac{de.\sin.u}{1-e^2}.(2-e^2-e\cos.u)$$

$$=\sqrt{(1-e^2)}.\frac{\{2\cos.(v-\varpi)+e+e.\cos^2.(v-\varpi)\}}{\{1+e.\cos.(v-\varpi)\}^2}.ed\varpi$$

$$-\sqrt{(1-e^2)}.\frac{\{2+e.\cos.(v-\varpi)\}}{\{1+e.\cos.(v-\varpi)\}^2}.de.\sin.(v-\varpi).$$

Substituant pour $ed\varpi$ et de, leurs valeurs données à la fin de la page 346 du second volume de la Mécanique Céleste; le second membre de cette équation se réduit à

$$2andt.r\left(\frac{dR}{dr}\right);$$

et comme on a $r.\left(\frac{dR}{dr}\right)=a.\left(\frac{dR}{da}\right)$; il devient

$$2a^2ndt.\left(\frac{dR}{da}\right);$$

l'expression précédente de $d\varepsilon-d\varpi$, donne ainsi cette équation fort simple que M. Poisson a trouvée le premier,

$$d\varepsilon=d\varpi.(1-\sqrt{1-e^2})+2a^2.\left(\frac{dR}{da}\right).ndt.$$

Si l'on rapporte, comme on l'a fait dans le second Livre de la Mécanique Céleste, le mouvement de la planète m, à celui de son

orbite primitive, et que l'on fasse, comme dans le même ouvrage,

$$p = \text{tang.}\,\varphi.\sin.\theta;\quad q = \text{tang.}\,\varphi.\cos.\theta,$$

φ étant l'inclinaison de l'orbite, et θ étant la longitude de son nœud ascendant; on aura par le n° 71 du second Livre,

$$dp = -\frac{dt}{\sqrt{a.(1-e^2)}}.\left(\frac{dR}{dq}\right);$$
$$dq = \frac{dt}{\sqrt{a.(1-e^2)}}.\left(\frac{dR}{dp}\right).$$

Maintenant, on a par le n° 44 du second Livre,

$$0=\left(\frac{dR}{da}\right).da+\left(\frac{dR}{de}\right).de+\left(\frac{dR}{d\varpi}\right).d\varpi+\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right).d\varepsilon+\left(\frac{dR}{dp}\right).dp+\left(\frac{dR}{dq}\right).dq;$$

de plus, on a par le n° 64 du même Livre,

$$da = -2a^2.\text{d}R;$$

et $\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right) = \frac{\text{d}R}{ndt}$; parce que l'angle nt est toujours accompagné de l'angle $+\varepsilon$; en substituant donc au lieu de da, de, $d\varepsilon$, dp et dq leurs valeurs précédentes; on aura cette équation très-simple,

$$d\varpi = -\frac{andt.\sqrt{1-e^2}}{e}.\left(\frac{dR}{de}\right);$$

ce qui donne

$$d\varepsilon = -\frac{andt.\sqrt{1-e^2}}{e}.(1-\sqrt{1-e^2}).\left(\frac{dR}{de}\right)+2a^2.\left(\frac{dR}{da}\right).ndt.$$

En réunissant ces diverses équations, on aura en observant que $n = a^{-\frac{3}{2}}$,

$$da = -2a^2.\text{d}R;\quad (1)$$
$$d\varepsilon = -\frac{andt.\sqrt{1-e^2}}{e}.(1-\sqrt{1-e^2}).\left(\frac{dR}{de}\right)+2a^2.\left(\frac{dR}{da}\right).ndt;\quad (2)$$
$$de = \frac{a.\sqrt{1-e^2}}{e}.(1-\sqrt{1-e^2}).\text{d}R+\frac{a.\sqrt{1-e^2}}{e}.ndt.\left(\frac{dR}{d\varpi}\right);\quad (3)$$
$$d\varpi = -\frac{andt.\sqrt{1-e^2}}{e}.\left(\frac{dR}{de}\right);\quad (4)$$
$$dp = -\frac{andt}{\sqrt{1-e^2}}.\left(\frac{dR}{dq}\right);\quad (5)$$
$$dq = \frac{andt}{\sqrt{1-e^2}}.\left(\frac{dR}{dp}\right);\quad (6)$$

On peut substituer dans ces équations, au lieu de $\mathrm{d}R$, $ndt.\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right)$, et par là, réduire les expressions précédentes, à ne renfermer que des différences partielles des élémens; mais il est aussi simple de conserver la différentielle $\mathrm{d}R$.

Dans le mouvement considéré comme elliptique, on doit rigoureusement substituer $\int ndt$, au lieu de nt; or $n = a^{-\frac{3}{2}}$; on a donc en nommant ζ le moyen mouvement de la planète m,

$$\zeta = \int ndt = 3.\int\int andt.\mathrm{d}R. \qquad (7)$$

2. Ces équations mettent en évidence le résultat auquel M. Poisson est parvenu, sur l'invariabilité des moyens mouvemens planétaires, en ayant même égard au carré de la force perturbatrice. En désignant par la caractéristique δ les variations finies; on aura en ne faisant varier dans R, que ce qui est relatif à la planète m, et en observant que $\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right) = \frac{\mathrm{d}R}{ndt}$;

$$\delta R = \frac{\mathrm{d}R}{ndt}.\{\delta(\int ndt)+\delta\varepsilon\}+\left(\frac{dR}{da}\right).\delta a+\left(\frac{dR}{de}\right).\delta e+\left(\frac{dR}{d\varpi}\right).\delta\varpi+\left(\frac{dR}{dp}\right).\delta p+\left(\frac{dR}{dp}\right).\delta q.$$

En substituant pour δa, δe, $\delta\varpi$, etc., les intégrales des valeurs précédentes de da, de, $d\varpi$, etc.; on aura

$$\begin{aligned}\delta R = \frac{dR}{ndt}.\delta(\int ndt)+2a^2.&\left\{\frac{\mathrm{d}R}{ndt}.\int ndt.\left(\frac{dR}{da}\right)-\left(\frac{dR}{da}\right).\int \mathrm{d}R\right\}\\ &+\frac{a.\sqrt{1-e^2}}{e}.(1-\sqrt{1-e^2}).\left\{\left(\frac{dR}{de}\right).\int \mathrm{d}R-\frac{\mathrm{d}R}{ndt}.\int ndt.\left(\frac{dR}{de}\right)\right\}\\ &+\frac{a.\sqrt{1-e^2}}{e}.\left\{\left(\frac{dR}{de}\right).\int ndt.\left(\frac{dR}{d\varpi}\right)-\left(\frac{dR}{d\varpi}\right).\int ndt.\left(\frac{dR}{de}\right)\right\}\\ &+\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}.\left\{\left(\frac{dR}{dq}\right).\int ndt.\left(\frac{dR}{dp}\right)-\left(\frac{dR}{dp}\right).\int ndt.\left(\frac{dR}{dq}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Pour avoir la valeur de $\mathrm{d}.\left\{\delta R-\frac{\mathrm{d}R}{ndt}.\delta(\int ndt\right\}$, donnée par cette équation ; il faut différentier par rapport aux seules quantités relatives à la planète m. Pour avoir la différentielle relative aux élémens de cette planète, il suffit de supprimer les signes $\int$, qui n'ont été introduits que par les intégrales des valeurs différentielles de ces élémens, et alors cette expression devient identiquement nulle ; il suffit donc pour avoir la différentielle d de la fonction

$\delta R - \frac{dR}{ndt}.\delta(\int ndt)$, de différentier par rapport à nt, les quantités hors du signe $\int$. L'expression de cette fonction est composée de termes de la forme $M.\int Ndt - N.\int Mdt$; M et N pouvant se développer en cosinus de la forme $k.\cos.(i'n't - int + A)$, i et i' étant des nombres quelconques entiers, positifs ou négatifs. Supposons que le cosinus précédent appartienne à M, et que $k'.\cos.(i'n't - int + A')$ soit le terme correspondant de N. Il faut combiner ces deux termes ensemble, pour avoir des quantités non périodiques dans $d.(M.\int Ndt - N\int Mdt)$; cette fonction devient alors

$$k.indt.\sin.(i'n't - int + A).\int k'dt.\cos.(i'n't - int + A')$$
$$-k'.indt.\sin.(i'n't - int + A').\int kdt.\cos.(i'n't - int + A);$$

fonction qui, en effectuant les intégrations, se réduit à zéro; ce qui est conforme à ce que j'ai démontré dans le n° 12 du sixième Livre, relativement aux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne. L'expression de $d.\left\{\delta R - \frac{dR}{ndt}.\delta.\int ndt\right\}$ est donc une fonction périodique.

L'expression de $d.\left\{\frac{dR}{ndt}.\delta.\int ndt\right\}$, ne renferme que des quantités périodiques; car on a

$$d.\left\{\frac{dR}{ndt}.\delta.\int ndt\right\} = \frac{ddR}{ndt}.\delta.\int ndt + \frac{dR}{ndt}.dt.\delta n.$$

Substituant pour δn, sa valeur $3\int an.dR$, on aura

$$d.\left\{\frac{dR}{ndt}.\delta.\int ndt\right\} = 3an.\frac{ddR}{ndt}.\int\int dR.dt + 3an.\frac{dR}{ndt}.dt.\int dR.$$

On peut réunir dans un seul terme, tous ceux du développement de R, qui dépendent d'un même angle $i'n't - int$, et il devient de la forme $k.\cos.(i'n't - int + A)$. En le substituant pour R dans les fonctions $\frac{ddR}{ndt}.\int\int dR.dt$, et $\frac{dR}{ndt}.\int dR$, on voit qu'elles se réduisent à des sinus du double de l'angle $i'n't - int + A$; ainsi la différentielle $d\left(\frac{dR}{ndt}.\delta.\int ndt\right)$ ne renferme que des quantités périodiques; d'où il suit que $d.\delta R$ ne renferme pareillement que des quantités

périodiques, lorsque l'on ne fait varier dans δR, que les quantités relatives à la planète m.

Pour avoir la valeur complète de $\mathrm{d}.\delta R$, il faut encore faire varier dans δR, ce qui est relatif à la planète m'. Pour cela, nommons R' ce que devient R relativement à la planète m' troublée par l'action de m; on aura

$$R' = \frac{m.(xx'+yy'+zz')}{r^3} - \frac{m}{\rho};$$

ainsi $$R = \frac{m'}{m}.R' + m'.(xx'+yy'+zz').\left(\frac{1}{r'^3}-\frac{1}{r^3}\right).$$

La variation de R relative aux variations de ce qui se rapporte à la planète m', est donc égale à la variation du second membre de cette équation, relative aux variations des coordonnées de m'. Désignons par δ' les variations qui se rapportent à ces coordonnées. On voit évidemment par l'analyse précédente, que

$$\frac{m'}{m}.\left(\delta'R' - \frac{\mathrm{d}'R'}{n'dt}.\delta'.\int n'dt\right)$$

se décompose en termes de la forme $M.\int Ndt - N.\int Mdt$. Pour avoir leur différentielle par rapport à la caractéristique d; il faut ne faire varier que les quantités hors du signe intégral; parce que les quantités enveloppées par le signe intégral, sont relatives aux élémens de la planète m'. Soit donc $k.\cos.(i'n't - int + A)$, un terme de M, et $k'.\cos.(i'n't - int + A')$ le terme correspondant de N; il faut combiner ces termes ensemble, pour avoir des quantités non périodiques dans $\mathrm{d}.(M.\int Ndt - N.\int Mdt)$; et alors il est facile de voir que cette fonction différentielle n'en renferme point. On s'assurera facilement que $\mathrm{d}.\left(\frac{\mathrm{d}'R'}{n'dt}.\delta'.\int n'dt\right)$ n'en contient aucune, par le même raisonnement qui nous a fait voir que $\mathrm{d}.\left(\frac{dR}{ndt}.\delta\int ndt\right)$ ne renferme que des quantités périodiques; ainsi $\mathrm{d}.\delta'R'$, ne contient que des quantités semblables.

Il nous reste à considérer la variation de $m'(xx'+yy'+zz').\left(\frac{1}{r'^3}-\frac{1}{r^3}\right)$. Nommons P cette fonction. On a par le n° 46 du second Livre,

$$\frac{m'x}{r^3} = -\frac{m'}{M}.\frac{ddx}{dt^2} - \frac{mm'}{M}.\frac{x}{r^3} - \frac{m'}{M}.\left(\frac{dR}{dx}\right),$$

M étant la masse du soleil. On a pareillement

$$\frac{m'x'}{r^3} = -\frac{m'}{M} \cdot \frac{ddx'}{dt^2} - \frac{m'^2}{M} \cdot \frac{x'}{r'^3} - \frac{m'}{M} \cdot \left(\frac{dR'}{dx'}\right).$$

Les coordonnées y, z, y', z' fournissent des équations semblables; et il est facile d'en conclure

$$P = \frac{m'}{M} \cdot \frac{d(x'dx - xdx' + y'dy - ydy' + z'dz - zdz')}{dt^2} + Q,$$

Q étant une fonction en x, y, z, x', y', z', de l'ordre du carré des masses m et m'. Il est clair que la variation

$$\frac{m'}{M} \cdot \frac{d.\delta' (x'dx - xdx' + y'dy - ydy' + z'dz - zdz')}{dt^2},$$

étant une différence exacte; on aura $\int \mathrm{d}\delta' P$, en y changeant la caractéristique d en d; et alors il est visible qu'elle ne renferme dans l'ordre m, que des quantités périodiques.

Le terme Q donnera dans $\int \mathrm{d}P$ celui-ci $\int \mathrm{d}Q$. En n'ayant égard qu'aux quantités de l'ordre m^2 dans $\mathrm{d}Q$, il suffit de substituer dans Q, au lieu des coordonnées, leurs valeurs elliptiques, et alors $\int \mathrm{d}Q$ ne contient que des quantités périodiques. Ainsi $\int \mathrm{d}.\delta' P$ ne renferme que de semblables quantités. Il suit de là que $\int \mathrm{d}.\delta R$ ne contient dans l'ordre m', que des quantités périodiques, en faisant varier dans R, les coordonnées des deux planètes m et m'.

S'il y a une troisième planète m''; elle ajoute à R la fonction

$$\frac{m''.(xx'' + yy'' + zz'')}{r''^3} - \frac{m''}{\rho'};$$

ρ' étant la distance de m'' à m. La partie de R, relative à l'action de m' sur m, reçoit alors une variation dépendante de l'action de m'' sur m'. Cette partie de R est

$$\frac{m'.(xx' + yy' + zz')}{r^3} - \frac{m'}{\rho};$$

la variation des coordonnées x', y', z' par l'action de m'', y produit des termes multipliés par $m'm''$, et qui sont fonctions des coordonnées elliptiques x, y, z, et des angles $n't$ et $n''t$. Mais ces angles devant disparaître dans la partie non périodique de $\mathrm{d}R$, et ne pouvant être détruits par l'angle nt, qu'introduisent les valeurs de x, y, z;

il faut n'avoir égard, dans le développement de la variation de R, qu'aux termes indépendans de $n't$ et de $n''t$. Ces termes seront de la forme $m'm''X$, X étant fonction des coordonnées de la planète m; ils introduisent dans $\int dR$, des termes de la forme $m'm''\int dX$, ou $m'm''X$, qui ne peuvent donner que des quantités non périodiques de l'ordre $m'm''$, quantités que nous avons négligées dans $\int dR$.

Pareillement, la variation des coordonnées x, y, z, par l'action de m'', ne peut introduire dans la partie précédente de R, que les angles nt et $n''t$; il ne faut donc considérer dans cette partie, que les termes indépendans de $n't$, et par conséquent de la forme $m'm''X$, X étant fonction des seules coordonnées x, y, z; ce qui, comme on vient de le voir, ne peut produire que des quantités négligibles. Ainsi, en n'ayant égard qu'aux quantités non périodiques de l'ordre m, dans $\int dR$, on peut supposer que m'' est nul, lorsque l'on considère la partie de R relative à l'action de m' sur m; et l'on peut supposer m' nul, lorsque l'on considère la partie de R, relative à l'action de m'' sur m: on vient de voir que dans ces deux cas, la variation séculaire de $\int dR$ est nulle. Cette variation est donc généralement nulle, lorsque l'on considère les actions réciproques de trois, ou d'un nombre quelconque de planètes, si l'on n'a égard qu'aux carrés et aux produits des masses perturbatrices, dans la valeur de dR.

Reprenons maintenant l'équation (7) du n° 1,

$$\zeta = 3.\iint andt.dR.$$

Sa variation est

$$\delta\zeta = 3an.\iint dt.d.\delta R + 3a^2.\iint(ndt.dR.\int dR).$$

On vient de voir que $d\delta R$ est nul, lorsque l'on n'a égard qu'aux quantités séculaires de l'ordre du carré des masses planétaires; on a vu pareillement que $dR\int dR$ est nul, eu égard à ces quantités. En ne considérant donc que les quantités séculaires qui par la double intégration, acquièrent un dénominateur de l'ordre du carré des masses planétaires; on voit que la variation $\delta\zeta$ est nulle. Ainsi l'on peut assurer que cette variation, en ayant égard soit aux quantités séculaires, soit aux quantités périodiques, ne peut être que de l'ordre des masses perturbatrices; résultat important auquel M. Poisson est parvenu le premier.

3. Considérons deux planètes m et m', en mouvement autour du

soleil dont nous prendrons la masse pour unité. Nommons v la distance angulaire de la planète m à la ligne d'intersection des deux orbites, v' la distance angulaire de la planète m' à la même droite; nommons encore γ l'inclinaison mutuelle des orbites. En prenant pour plan des coordonnées, l'orbite de m, et la ligne des nœuds des orbites, pour origine des x; on aura

$$x = r.\cos.v;\quad y = r.\sin.v;\quad z = 0;$$
$$x' = r'.\cos.v';\quad y' = r'.\sin.v'\cos.\gamma;\quad z' = r'.\sin.\gamma.\sin.v';$$

ce qui donne en faisant

$$1 - \cos.\gamma = 2.\sin^2.\tfrac{1}{2}\gamma = 6;$$

$$R = \frac{m'.(xx'+yy'+zz')}{r'^3} - \frac{m'}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}$$
$$= \frac{m'.r}{r'^2}.\{\cos.(v'-v) - 6.\sin.v.\sin v'\} - \frac{m'}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'.\cos.(v'-v)+26.rr'.\sin.v.\sin.v'}};$$

R sous cette forme, devient indépendant du plan auquel on a rapporté les coordonnées. En le développant en sinus et cosinus d'angles croissans proportionnellement au temps t, par la substitution des valeurs elliptiques de r, r', v, v'; il devient fonction des distances moyennes $nt+\varepsilon$, $n't+\varepsilon'$, des planètes à la ligne des nœuds; des distances des périhélies à la même ligne; des demi-grands axes a et a'; des excentricités e et e'; et de 6 ou de l'inclinaison mutuelle des orbites, 6 étant très-petit et de l'ordre du carré de cette inclinaison. Sous cette forme R ne renferme point explicitement, les variables p et q; mais on peut les y faire naître de la manière suivante.

Si au lieu de rapporter les mouvemens des planètes à leurs orbites, on les rapporte au plan fixe de l'orbite primitive de m; alors z ne sera point nul, et il sera égal à rs, s étant le sinus de la latitude de m, au-dessus de ce plan. En négligeant le carré des forces perturbatrices, on pourra négliger le carré de s; on aura ainsi au lieu de R, la fonction suivante que nous désignerons par $\overline{R}$,

$$\frac{m'.r}{r'^2}.\{\cos.(v'-v) - 6.\sin.v.\sin.v' + s.\sin.\gamma.\sin.v'\}$$
$$- \frac{m'}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'.\cos.(v'-v)+26.rr'.\sin.v.\sin.v'-2rr'.s.\sin.v.\sin.v'}}.$$

Retranchons de v et de v', tant dans R que dans $\overline{R}$, la longitude θ' du nœud de l'orbite de m' avec m, cette longitude étant comptée sur l'orbite de m; ce qui revient à changer les origines des v et de v'; et supposons

$$s = q.\sin.(v-\theta') - p.\cos.(v-\theta');$$

on aura

$$R = \frac{m'r}{r'^2}.\{(1-\tfrac{1}{2}\mathit{6}).\cos.(v'-v) + \tfrac{1}{2}.\mathit{6}.\cos.(v'+v-2\theta')\}$$
$$-\frac{m'}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\{(1-\frac{1}{2}\mathit{6}).\cos.(v'-v)+\frac{1}{2}\mathit{6}.\cos.(v'+v-2\theta')\}}},$$

$$\overline{R} = \frac{m'r}{r'^2}.\left\{\begin{array}{l}(1-\frac{1}{2}\mathit{6}+\frac{1}{2}q.\sin.\gamma).\cos.(v'-v)+(\frac{1}{2}\mathit{6}-\frac{1}{2}q\sin.\gamma).\cos.(v'+v-2\theta')\\ -\frac{1}{2}p.\sin.\gamma.\sin.(v'-v)-\frac{1}{2}p.\sin.\gamma.\sin.(v'+v-2\theta')\end{array}\right\}$$
$$-\frac{m'}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'.\left\{\begin{array}{l}(1-\frac{1}{2}\mathit{6}+\frac{1}{2}q.\sin.\gamma).\cos.(v'-v)+(\frac{1}{2}\mathit{6}-\frac{1}{2}q.\sin.\gamma)\cos.(v'+v-2\theta')\\ -\frac{1}{2}p.\sin.\gamma.\sin.(v'-v)-\frac{1}{2}p.\sin.\gamma.\sin.(v'+v-2\theta')\end{array}\right\}}}.$$

Maintenant, il est visible que l'on changera R dans $\overline{R}$, si l'on fait varier dans R, $\mathit{6}$ de $\delta\mathit{6}$, v de δv, et θ' de $\delta\theta'$, de manière que l'on ait

$$\delta\mathit{6} = -q.\sin.\gamma;$$
$$(1-\tfrac{1}{2}\mathit{6}).\delta v = \cos^2.\tfrac{1}{2}\gamma.\delta v = -\tfrac{1}{2}p.\sin.\gamma;$$
$$\mathit{6}.\delta\theta' - \tfrac{1}{2}\mathit{6}.\delta v = -\tfrac{1}{2}p.\sin.\gamma.$$

On aura ainsi

$$\overline{R} = R - q.\sin.\gamma.\left(\frac{dR}{d\mathit{6}}\right) - p.\text{tang}.\tfrac{1}{2}\gamma.\left(\frac{dR}{dv}\right) - \frac{p}{\sin.\gamma}.\left(\frac{dR}{d\theta'}\right);$$

on a par le n° 1, $\left(\frac{dR}{dv}\right) = \frac{\text{d}R}{ndt} + \left(\frac{dR}{d\varpi}\right)$; cela posé, les équations (5) et (6) donneront les deux suivantes :

$$dp = \frac{andt}{\sqrt{1-e^2}}.\sin.\gamma.\left(\frac{dR}{d\mathit{6}}\right); \qquad (8)$$
$$dq = -\frac{andt}{\sin.\gamma.\sqrt{1-e^2}}.\left\{\left(\frac{dR}{d\theta'}\right)+\mathit{6}.\left(\frac{\text{d}R}{ndt}+\left(\frac{dR}{d\varpi}\right)\right)\right\}. \qquad (9)$$

En réunissant ces équations, aux équations (1), (2), (3), (4), (7) du n° 1, on aura par la seule différentiation des termes du développement de R, les termes correspondans de chacun des élé-

mens du mouvement de m; ce qui facilite extrêmement le calcul de ces différens termes. Soit

$$m'k.\cos.(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - 2g''\theta')$$

un des termes du développement de R; le terme correspondant du demi-grand axe sera

$$\frac{2m'a^2.in}{i'n'-in}.k.\cos.(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - 2g''\theta');$$

le terme correspondant du mouvement moyen, sera

$$-\frac{3m'.in^2}{(i'n'-in)^2}.ak.\sin.(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - 2g''\theta').$$

Le terme correspondant de l'époque, sera

$$-\frac{m'.na}{i'n'-in}.\left\{(1-\sqrt{1-e^2}).\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}.\left(\frac{dk}{de}\right)-2a^2.\left(\frac{dk}{da}\right)\right\}.\sin.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon-g\varpi-g'\varpi'-2g''\theta');$$

le terme correspondant de l'excentricité, sera

$$-\frac{m'n.\sqrt{1-e^2}}{e}.ak.\frac{\{g+i.(1-\sqrt{1-e^2})\}}{i'n'-in}.\cos.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon-g\varpi-g'\varpi'-2g''\theta');$$

celui de la longitude du périhélie, sera

$$-\frac{m'n.\sqrt{1-e^2}}{e(i'n'-in)}.a\left(\frac{dk}{de}\right).\sin.(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - 2g''\theta');$$

le terme correspondant de p, sera

$$\frac{m'n.\sin.\gamma.a}{\sqrt{1-e^2}.(i'n'-in)}\left(\frac{dk}{d\gamma}\right).\sin.(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - 2g''\theta');$$

enfin le terme correspondant de q, sera

$$\frac{2m'n.ak}{(i'n'-in).\sin.\gamma.\sqrt{1-e^2}}.\{g''+(in+g).\sin^2.\tfrac{1}{2}\gamma\}.\cos.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon-g\varpi-g'\varpi'-2g''\theta').$$

Ces résultats sont conformes à ceux que l'on a trouvés dans le chapitre VIII du second Livre de la Mécanique Céleste; mais ils ont sur eux, l'avantage de s'étendre à toutes les puissances des excentricités et des inclinaisons.

On aura les variations séculaires des élémens de l'orbite de m, en réduisant R à sa partie non périodique, que nous désignerons par $m'F$. Alors dR est nul, ainsi que da, et l'on a

$$de = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{e}.m'ndt.\left(\frac{dF}{d\varpi}\right);$$

$$d\varpi = -\frac{am'ndt.\sqrt{1-e^2}}{e}.\left(\frac{dF}{de}\right);$$

$$d\varepsilon = -\frac{am'ndt.\sqrt{1-e^2}}{e}.(1-\sqrt{1-e^2}).\left(\frac{dF}{de}\right)+2a^2.\left(\frac{dF}{da}\right).m'ndt;$$

$$dp = -\frac{am'ndt}{\sqrt{1-e^2}}.\left(\frac{dF}{dq}\right);$$

$$dq = \frac{am'ndt}{\sqrt{1-e^2}}.\left(\frac{dF}{dp}\right);$$

ou

$$dp = \frac{am'ndt}{\sqrt{1-e^2}}.\sin.\gamma.\left(\frac{dF}{d\theta}\right);$$

$$dq = -\frac{am'ndt}{\sin.\gamma.\sqrt{1-e^2}}.\left\{\left(\frac{dF}{d\theta'}\right)+\theta.\left(\frac{dF}{d\varpi}\right)\right\}.$$

On peut observer ici que R étant égal à

$$m'.\frac{(xx'+yy'+zz')}{r'^3}-\frac{m'}{\rho};$$

il est aux quantités près de l'ordre m'^2, égal à

$$-m'.\frac{x.ddx'+y.ddy'+z.ddz')}{dt^2}-\frac{m'}{\rho};$$

sa partie non périodique ne dépend donc que de la partie non périodique de $-\frac{m'}{\rho}$; F est donc égal à la partie non périodique de $-\frac{1}{\rho}$, développé en série de cosinus d'angles croissans proportionnellement au temps t; ensorte qu'il est le même pour les deux planètes. En faisant varier dans F, les élémens de l'orbite de m, et substituant pour δe, δa, δp, δq, leurs valeurs données par les intégrales des équations différentielles précédentes, on voit que δF se réduit à zéro; et la même égalité a lieu relativement aux élémens de l'orbite de m'; ce que j'ai démontré dans le n° 5

du sixième Livre de la Mécanique Céleste, en ne portant l'approximation que jusqu'aux termes de l'ordre des quatrièmes puissances des excentricités exclusivement.

On a par ce qui précède,

$$\delta\epsilon = -q.\sin.\gamma; \quad \delta\theta' = -\frac{p}{\sin.\gamma}.$$

Supposons que $\delta\epsilon$ et $\delta\theta'$, croissent respectivement des quantités $d\epsilon$ et $d\theta'$; on aura

$$d\epsilon = -dq.\sin.\gamma; \quad d\theta' = -\frac{dp}{\sin.\gamma};$$

substituant pour dp et dq, leurs valeurs, on aura

$$d\theta' = -\frac{am'ndt}{\sqrt{1-e^2}}.\left(\frac{dF}{d\epsilon}\right);$$

$$d\gamma = \frac{am'ndt}{\sin.\gamma.\sqrt{1-e^2}}.\left\{\left(\frac{dF}{d\theta'}\right)+\epsilon.\left(\frac{dF}{d\varpi}\right)\right\}.$$

On a

$$\left(\frac{dF}{d\theta'}\right) = -\left(\frac{dF}{d\varpi}\right)-\left(\frac{dF}{d\varpi'}\right);$$

parce que F étant développé en cosinus de la forme $H.\cos.(g\varpi+g'\varpi'+2g''\theta')$; la somme $g+g'+2g''$ des coefficiens des angles ϖ, ϖ' et θ' doit être nulle, pour que ce terme soit indépendant de l'origine arbitraire de ces angles. On a donc

$$d\gamma = -\frac{am'ndt}{\sin.\gamma.\sqrt{1-e^2}}.\left\{(1-\epsilon).\left(\frac{dF}{d\varpi}\right)+\left(\frac{dF}{d\varpi'}\right)\right\};$$

et par conséquent on a en vertu des expressions précédentes de de et de de',

$$\frac{d\gamma.\sin.\gamma}{\cos.\gamma}+\frac{ede}{1-e^2}+\frac{e'de'}{1-e'^2} = -\frac{a'mn'.ede}{am'n.\cos.\gamma.\sqrt{1-e^2}.\sqrt{1-e'^2}} - \frac{am'n.e'de'}{a'mn'.\cos.\gamma.\sqrt{1-e^2}.\sqrt{1-e'^2}}.$$

En multipliant cette équation par $\cos.\gamma.\sqrt{1-e^2}.\sqrt{1-e'^2}$, et intégrant, on aura

$$2\cos.\gamma.\sqrt{1-e^2}.\sqrt{1-e'^2} = \text{const.} - \frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}.(1-e^2) - \frac{m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}}.(1-e'^2).$$

Faisons pour abréger

$$\sqrt{a(1-e^2)}=f; \qquad \sqrt{a'(1-e'^2)}=f';$$

nous aurons

$$6=\frac{(mf+m'f')^2-c^2}{2mm'ff'};$$

c^2 étant une constante arbitraire, indépendante des élémens.

La valeur précédente de $d\theta'$ exprime le mouvement de l'intersection des deux orbites, produit par l'action de m' et rapporté à l'orbite de m. Concevons un plan intermédiaire entre ceux des deux orbites, et qui passe par leur intersection mutuelle. Nommons φ l'inclinaison de l'orbite de m à ce plan. Pour avoir le mouvement différentiel du nœud de l'orbite de m sur ce plan, produit par l'action de m'; il faut multiplier la valeur précédente de $d\theta'$ par $\frac{\sin.\gamma}{\sin.\varphi}$. En nommant donc $d\theta$, ce mouvement, on aura

$$d\theta=-\frac{m'dt}{f}\cdot\frac{\sin.\gamma}{\sin.\varphi}\cdot\left(\frac{dF}{d6}\right).$$

En nommant φ' l'inclinaison de l'orbite de m' sur le même plan; on aura $\varphi+\varphi'=\gamma$; et

$$d'\theta=-\frac{mdt}{f'}\cdot\frac{\sin.\gamma}{\sin.\varphi'}\cdot\left(\frac{dF}{d6}\right),$$

$d'\theta$ étant le mouvement du nœud de l'orbite de m' sur ce plan, et produit par l'action de m sur m'. Les deux mouvemens $d\theta$ et $d'\theta$ seront égaux, et l'intersection des deux orbites restera sur le plan que nous venons de considérer, s'il partage l'angle γ de l'inclinaison mutuelle des orbites, de manière que l'on ait

$$mf.\sin.\varphi=m'f'.\sin.\varphi'.$$

Ce résultat est le même que l'on a trouvé dans le n° 62 du second Livre de la Mécanique Céleste, où l'on voit que le plan dont il s'agit, est celui du *maximum* des aires, et que l'on a

$$c=mf.\cos.\varphi+m'f'.\cos.\varphi'.$$

Cette équation combinée avec la précédente, donne l'intégrale

trouvée ci-dessus,

$$\mathfrak{C} = \frac{(mf + m'f')^2 - c^2}{2mm'ff'}.$$

Ces deux équations donnent encore les suivantes :

$$\sin.\varphi = \frac{m'f'.\sin.\gamma}{c}; \qquad \sin.\varphi' = \frac{mf.\sin.\gamma}{c};$$

$$\cos.\varphi = \frac{c^2 + m^2f^2 - m'^2f'^2}{2mf.c}; \qquad \cos.\varphi' = \frac{c^2 + m'^2f'^2 - m^2f^2}{2m'f'.c};$$

$$d\theta = -\frac{cdt}{ff'}.\left(\frac{dF}{d\mathfrak{C}}\right) = \frac{dt.\sqrt{(mf + m'f')^2 - 2mm'ff'\mathfrak{C}}}{ff'}.$$

Désignons par ϖ_1 et ϖ'_1 les distances des périhélies de m et de m', à la ligne d'intersection mutuelle des orbites ; on aura $d\varpi_1$ en retranchant de la différentielle $d\varpi$, le mouvement $d\theta$ de cette intersection, rapporté à l'orbite de m; et il est visible qu'il suffit pour cela, de le multiplier par $\cos.\varphi$; or on a

$$d\theta.\cos.\varphi = -\frac{(mf + m'f' - m'f'\mathfrak{C})}{ff'}.dt.\left(\frac{dF}{d\mathfrak{C}}\right);$$

on aura donc

$$ed\varpi_1 = -am'ndt.\sqrt{1-e^2}.\left(\frac{dF}{de}\right) + \frac{(mf + m'f' - m'f'\mathfrak{C})}{ff'}.edt.\left(\frac{dF}{d\mathfrak{C}}\right);$$

$$ede = am'ndt.\sqrt{1-e^2}.\left(\frac{dF}{d\varpi_1}\right);$$

on aura pareillement

$$e'd\varpi' = -a'mn'dt.\sqrt{1-e'^2}.\left(\frac{dF}{de'}\right) + \frac{(mf + m'f' - mf\mathfrak{C})}{ff'}.e'dt.\left(\frac{dF}{d\mathfrak{C}}\right);$$

$$e'de' = a'mn'dt.\sqrt{1-e'^2}.\left(\frac{dF}{d\varpi'_1}\right);$$

F est fonction de a, a', e, e', ϖ_1, ϖ'_1 et $\mathfrak{C}$. Si l'on élimine des seconds membres de ces équations, $\mathfrak{C}$ au moyen de sa valeur

$$\mathfrak{C} = \frac{(mf + m'f')^2 - c^2}{2mm'ff'},$$

on aura quatre équations différentielles entre les quatre variables e, e', ϖ_1 et ϖ'_1. On pourra même leur donner une forme plus

simple encore, en faisant

$$h = e.\sin.\varpi_1; \qquad l = e.\cos.\varpi_1;$$
$$h' = e'.\sin.\varpi_1'; \qquad l' = e'.\cos.\varpi_1';$$

ce qui les rend linéaires, lorsque l'on néglige les puissances supérieures des excentricités, et ce qui facilite leur intégration étendue par approximation, à des puissances quelconques des excentricités. On n'aura ainsi que la position des orbites, relative à la position variable de la ligne de leur intersection mutuelle. On aura ensuite leur inclinaison respective, au moyen de la valeur précédente de γ, et l'on en conclura leurs inclinaisons sur le plan du *maximum* des aires, au moyen des valeurs précédentes de $\sin.\varphi$ et de $\sin.\varphi'$. Enfin on aura le mouvement de l'intersection des deux orbites sur ce plan, en intégrant l'expression précédente de $d\theta$. Telle est, si je ne me trompe, la solution la plus générale et la plus simple du problème des variations séculaires des élémens des orbites planétaires.

Reprenons l'équation

$$c^2 = (mf + m'f')^2 - 2mm'ff'.\gamma.$$

Si l'on néglige les quantités de l'ordre des quatrièmes puissances des excentricités et des inclinaisons, elle donnera

$$\text{const.} = m\sqrt{a}.e^2 + m'\sqrt{a'}.e'^2 + \frac{2mm'.\sqrt{aa'}.\gamma}{m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'}};$$

ainsi a et a' étant par ce qui précède, constans même en ayant égard au carré de la force perturbatrice, on aura

$$0 = m\sqrt{a}.e\delta e + m'\sqrt{a'}.e'\delta e' + \frac{mm'\sqrt{aa'}\gamma\delta\gamma}{m\sqrt{a}+m.\sqrt{a'}};$$

équation à laquelle je suis parvenu dans le n° 15 du sixième Livre, en n'ayant égard qu'aux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne. Il en résulte que le plan invariable déterminé dans le n° 62 du second Livre, reste invariable, en ayant même égard au carré de la force perturbatrice.

4. On peut, au moyen des expressions différentielles des élémens,

déterminer d'une manière fort simple, l'influence de la figure de la terre, sur les mouvemens de la lune. On a vu dans le second chapitre du septième Livre, que cette action ajoute à la valeur de R, la fonction

$$(\alpha\rho - \tfrac{1}{2}\alpha\varphi).\frac{D^2}{r^3}.(\mu^2 - \tfrac{1}{3});$$

$\alpha\rho$ est l'aplatissement de la terre; $\alpha\varphi$ est le rapport de la force centrifuge, à la pesanteur, à l'équateur; D est le rayon moyen du sphéroïde terrestre; et μ est le sinus de la déclinaison de la lune, sinus qui par le n° cité, est à fort peu près,

$$\mu = \sqrt{1-ss}.\sin.\lambda.\sin.fv + s.\cos.\lambda,$$

ou exactement

$$\mu = \frac{\sin.\lambda.\sin.fv + s.\cos.\lambda}{\sqrt{1+ss}},$$

fv étant la longitude vraie de la lune, comptée de l'équinoxe du printemps; λ étant l'obliquité de l'écliptique, et s étant la tangente de la latitude de la lune.

La partie de R, dépendante de l'action du soleil, est de la forme r^2Q, en négligeant les termes qui dépendant de la parallaxe du soleil, sont très-petits. On aura ainsi à fort peu près,

$$R = r^2Q + (\alpha\rho - \tfrac{1}{2}\alpha\varphi).\frac{D^2}{r^3}.(\sin^2.\lambda.\sin^2.fv + 2s.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\sin.fv);$$

ce qui donne

$$2r\left(\frac{dR}{dr}\right) = 2a.\left(\frac{dR}{da}\right) = 4r^2Q - 6.(\alpha\rho - \tfrac{1}{2}\alpha\varphi).\frac{D^2}{r^3}.(\sin^2.\lambda.\sin^2.fv + 2s.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\sin.fv).$$

Ne considérons ici que les inégalités dépendantes de l'angle $gv - fv$, gv étant ce que l'on nomme l'*argument de latitude;* ensorte que l'on a à fort peu près $s = \gamma.\sin.gv$, γ étant l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique. On aura ainsi

$$R = r^2Q + (\alpha\rho - \tfrac{1}{2}\alpha\varphi).\frac{D^2}{a^3}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\gamma.\cos.(gv - fv);$$

$$2a^2\left(\frac{dR}{da}\right) = 4a.r^2Q - 6.(\alpha\rho - \tfrac{1}{2}\alpha\varphi).\frac{D^2}{a^2}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\gamma.\cos.(gv - fv).$$

On a vu dans le n° 1, que la variation de dR est nulle, en ayant même égard au carré de la force perturbatrice; le coefficient de cos.$(gv-fv)$ dans R doit donc être nul. Désignons par la caractéristique δ placée devant une fonction, la partie de cette fonction qui dépend de l'aplatissement de la terre; nous aurons

$$0=\delta.r^2Q+(\alpha\rho-\tfrac{1}{2}\alpha\phi).\frac{D^2}{a^3}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\gamma.\cos.(gv-fv);$$

d'où l'on tire

$$2\delta.a^2\left(\frac{dR}{da}\right)=-10.(\alpha\rho-\tfrac{1}{2}\alpha\phi).\frac{D^2}{a^2}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\gamma.\cos.(gv-fv).$$

Reprenons maintenant l'expression de $d\varepsilon$, du n° 1,

$$d\varepsilon=\frac{andt.\sqrt{1-e^2}}{e}.(1-\sqrt{1-e^2}).\left(\frac{dR}{de}\right)+2a^2.\left(\frac{dR}{da}\right).ndt.$$

Il est facile de voir que si l'on néglige l'excentricité de l'orbite, on aura

$$d\varepsilon=2a^2.\left(\frac{dR}{da}\right).ndt;$$

et par conséquent en n'ayant égard qu'au cosinus de l'angle $gv-fv$, et substituant dv pour ndt, on aura

$$d\varepsilon=-10.(\alpha\rho-\tfrac{1}{2}\alpha\phi).\frac{D^2}{a^2}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\gamma dv.\cos.(gv-fv).$$

La valeur de $d\varepsilon$ est ici rapportée au plan de l'orbite lunaire : pour la rapporter à l'écliptique, il faut par le n° 5 du sixième Livre, lui ajouter la quantité $\frac{qdp-pdq}{2}$. Déterminons présentement p et q.

L'équation

$$s=\gamma.\sin.gv$$

peut être mise sous cette forme :

$$s=\gamma.\cos.(g-f)v.\sin.fv+\gamma.\sin.(g-f)v.\cos.fv;$$

en la comparant à celle-ci :

$$s=q.\sin.fv-p.\cos.fv;$$

on aura

$$p = -\gamma.\sin.(g-f).v\,; \qquad q = \gamma.\cos.(g-f).v,$$

ce qui donne

$$dp = -(g-f).qdv\,;$$
$$dq = (g-f).pdv.$$

La valeur de R renfermant le terme $(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi).\frac{D^2}{a^3}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.q$; elle ajoute par les équations (5) et (6) du n° 1 à la valeur de dp, le terme

$$-(\alpha\rho - \tfrac{1}{2}\alpha\varphi).\frac{D^2}{a^2}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.dv\,;$$

on a ainsi les deux équations

$$dp = -(g-f).q.dv - (\alpha\rho - \tfrac{1}{2}\alpha\varphi).\frac{D^2}{a^2}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.dv\,;$$
$$dq = (g-f).pdv.$$

Ces équations donnent dans l'expression de q, le terme constant

$$-\frac{(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi)}{g-f}.\frac{D^2}{a^2}.\sin.\lambda.\cos.\lambda\,;$$

d'où résulte dans la latitude s, l'inégalité

$$-\frac{(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi)}{g-f}.\frac{D^2}{a^2}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\gamma.\sin.fv,$$

ce qui est conforme au résultat du chapitre II du septième Livre.

Le terme constant de q donne, dans la fonction $\frac{qdp - pdq}{2}$, le terme

$$\tfrac{1}{2}.(\alpha\rho - \tfrac{1}{2}\alpha\varphi).\frac{D^2}{a^2}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\gamma.\cos.(gv - fv)\,;$$

en nommant donc $d\epsilon_1$, la valeur précédente de $d\epsilon$, rapportée à l'écliptique, on aura

$$d\epsilon_1 = -\tfrac{19}{2}.(\alpha\rho - \tfrac{1}{2}\alpha\varphi).\frac{D^2}{a^2}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\gamma.\cos.(gv - fv),$$

ce qui donne dans ϵ_1, et par conséquent dans le mouvement de la

lune en longitude, l'inégalité,

$$-\frac{19}{2}\cdot\frac{(\alpha\rho-\frac{1}{2}\alpha\phi)}{g'-f}\cdot\frac{D^2}{a^2}\cdot\sin.\lambda\cdot\cos.\lambda\cdot\gamma\cdot\sin.(gv-fv);$$

résultat entièrement conforme à celui du second chapitre du septième Livre.

Enfin, la fonction R étant indéterminée; les expressions différentielles précédentes des élémens des orbites, peuvent également servir à déterminer les variations qu'ils reçoivent, soit par la résistance de milieux éthérés, soit par l'impulsion de la lumière solaire, soit par les changemens que la suite des temps peut apporter dans les masses du soleil et des planètes. Il suffit pour cela, de déterminer la fonction R qui en résulte, par les considérations exposées dans le chapitre VII du dixième Livre.

Sur les deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne.

5. Dans la théorie de ces inégalités, exposée dans le sixième Livre, j'ai eu égard aux cinquièmes puissances des excentricités et des inclinaisons des orbites. Mais j'ai reconnu que les valeurs de $N^{(0)}$, $N^{(1)}$, etc. du n° 7 du sixième Livre, avaient été prises avec un signe contraire, et qu'ainsi la partie de ces inégalités, dépendante de ces valeurs, doit changer de signe. Il faut donc ajouter aux expressions des longitudes moyennes, que j'ai données dans le huitième chapitre du dixième Livre, le double de cette partie prise avec une signe contraire. Cette partie pour Jupiter est par le n° 33 du sixième Livre,

$$\begin{aligned}&(38'',692571-t.0'',005418).\sin.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv})\\&-(25'',064701+t.0'',015076).\cos.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv});\end{aligned}$$

et pour Saturne, elle est par le n° 35 du même Livre,

$$\begin{aligned}&-(89'',952440-t.0'',012596).\sin.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv})\\&+(58'',270353+t.0'',035048).\cos.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{2v}).\end{aligned}$$

L'addition aux longitudes moyennes de Jupiter et de Saturne, du

double de ces inégalités prises avec un signe contraire, ne doit changer que les moyens mouvemens et les époques de ces deux planètes : elle ne peut altérer que d'une manière insensible, les autres élémens elliptiques conclus des observations faites depuis 1750 jusqu'en 1800; parce que dans cet intervalle, les variations de ces inégalités sont à fort peu près proportionnelles aux temps : on peut donc déterminer les corrections des moyens mouvemens, de manière qu'elles rendent le double de ces inégalités affectées d'un signe contraire, nul en 1750 où t est nul, et en 1800 où $t = 50$. On trouve ainsi en ayant égard à la correction de la masse de Saturne, trouvée dans le chapitre VIII du Livre X, qu'il faut ajouter à la longitude moyenne q^{IV} de Jupiter, donnée dans le même chapitre, la fonction

$$\begin{aligned} & 51'',98 + t.0'',4156 \\ & -(73'',58 - t.0'',01030).\sin.(5n^{\text{V}}t - 2n^{\text{IV}}t + 5\varepsilon^{\text{V}} - 2\varepsilon^{\text{IV}}) \\ & +(47'',65 + t.0'',02870).\cos.(5n^{\text{V}}t - 2n^{\text{IV}}t + 5\varepsilon^{\text{V}} - 2\varepsilon^{\text{IV}}); \end{aligned}$$

et à la longitude moyenne q^{V} de Saturne, donnée dans le même chapitre, la fonction

$$\begin{aligned} & -127'',13 - t.1'',0212 \\ & +(179'',952 - t.0'',025192).\sin.(5n^{\text{V}}t - 2n^{\text{IV}}t + 5\varepsilon^{\text{V}} - 2\varepsilon^{\text{IV}}) \\ & -(116'',541 + t.0'',070196).\cos.(5n^{\text{V}}t - 2n^{\text{IV}}t + 5\varepsilon^{\text{V}} - 2\varepsilon^{\text{IV}}). \end{aligned}$$

Ces corrections ont l'avantage de rapprocher les formules des mouvemens de Jupiter et de Saturne, données dans le chapitre cité, d'une observation très-précieuse d'Ebn-Junis, et qui réduite au méridien de Paris, eut lieu le 31 octobre 1807, à $0^j,16$. Les formules citées donnent 2251'' pour l'excès de la longitude géocentrique de Saturne sur celle de Jupiter à cet instant, et l'astronome arabe la trouva par son observation, de 4444''; la différence est 2193''; mais les corrections précédentes augmentent de 1198'', l'excès de la longitude de Jupiter sur celle de Saturne, et rapprochent conséquemment de cette quantité, les formules, de l'observation qui n'en diffère plus que de 995'', ou d'environ cinq minutes sexagésimales; ce qui est bien inférieur à l'erreur dont cette observation est susceptible.

FIN.

TRAITÉ
DE
MÉCANIQUE CÉLESTE.

SECONDE PARTIE.

THÉORIES PARTICULIÈRES DES MOUVEMENS CÉLESTES.

LIVRE VI.

THÉORIE DES MOUVEMENS PLANÉTAIRES.

Les mouvemens des planètes sont sensiblement troublés par leur attraction mutuelle : il importe de déterminer exactement les inégalités qui en résultent, soit pour vérifier la loi de la pesanteur universelle, soit pour perfectionner les tables astronomiques, soit enfin pour reconnoître si des causes étrangères au système planétaire, ne viennent point altérer sa constitution et ses mouvemens. Je me propose ici d'appliquer aux corps de ce système, les méthodes et les formules générales présentées dans la première partie de cet

ouvrage. Je n'ai développé dans le second livre, que les inégalités indépendantes des excentricités et des inclinaisons des orbites, et celles qui ne dépendent que de leur première puissance; mais il est souvent indispensable d'étendre les approximations, jusqu'aux carrés et aux puissances supérieures de ces quantités, et même de considérer les termes dépendans du carré de la force perturbatrice. Je commence par exposer les formules de ces inégalités : en substituant ensuite dans ces formules et dans celles du second livre, les nombres relatifs à chaque planète; je donne les expressions numériques de son rayon vecteur et de son mouvement tant en longitude qu'en latitude. Bouvard a bien voulu faire le calcul de ces substitutions, et le zèle avec lequel il s'est livré à ce pénible travail, lui mérite la reconnoissance des Astronomes. Divers Géomètres ont déjà calculé la plupart des inégalités planétaires : leurs résultats ont servi de vérification à ceux de Bouvard, et lorsqu'il a trouvé des différences, il a remonté à la source de l'erreur, pour s'assurer de l'exactitude de ses calculs. Enfin, il a revu avec un soin particulier, le calcul des inégalités qui n'avoient point encore été déterminées; et quelques équations de condition qui ont lieu entre ces inégalités, m'ont fourni les moyens d'en vérifier plusieurs. Malgré toutes ces précautions, il peut s'être glissé dans les résultats suivans, des erreurs presque inévitables dans un aussi long travail; mais j'ai lieu de penser qu'elles ne portent que sur des quantités insensibles, et qu'elles ne nuiront point à la justesse des tables fondées sur ces résultats qui, par leur importance dans l'Astronomie planétaire dont ils sont la base, méritent d'être vérifiés avec les soins que l'on a mis dans le calcul des tables de logarithmes et de sinus.

Les théories de Mercure, Vénus, la Terre et Mars, n'offrent que des inégalités périodiques peu considérables; elles sont cependant très-sensibles par les observations modernes qu'elles représentent avec une exactitude remarquable. Le développement des inégalités séculaires de ces planètes et de la lune, fera connoître exactement leurs masses dont la véritable valeur est la seule chose que leurs théories laissent encore à desirer. C'est principalement dans les mouvemens de Jupiter et de Saturne, les deux

plus grands corps du système planétaire, que l'attraction mutuelle des planètes est sensible. Leurs moyens mouvemens sont presque commensurables; en sorte que cinq fois celui de Saturne est à très-peu-près égal à deux fois celui de Jupiter : les inégalités considérables qui naissent de ce rapport, et dont on ignoroit les loix et la cause, ont paru long-temps faire exception de la loi de la pesanteur universelle, et maintenant, elles en sont une des preuves les plus frappantes. Il est extrêmement curieux de voir avec quelle précision les deux principales inégalités de ces planètes, dont la période embrasse plus de neuf cents années, satisfont aux observations anciennes et modernes : les siècles à venir, en les développant, mettront de plus en plus cet accord en évidence. Pour en faciliter la comparaison aux Astronomes, j'ai porté l'approximation jusqu'aux termes dépendans du carré de la force perturbatrice; ce qui me fait espérer que les valeurs que je leur assigne, s'éloigneront fort peu de celles que l'on trouvera par une longue suite d'observations continuées pendant une période entière. Ces inégalités ont sur les variations séculaires des orbes de Jupiter et de Saturne, une grande influence dont je développe les expressions analytique et numérique. Enfin la planète Uranus est assujétie à des inégalités sensibles que je détermine, et que les observations confirment.

Le premier jour de ce siècle est remarquable par la découverte d'une planète dont l'orbe est situé entre ceux de Jupiter et de Mars, et à laquelle on a donné le nom de *Cérès*. Elle ne paroît que comme une étoile de la huitième ou neuvième grandeur; son excessive petitesse rend donc insensible son action sur le système planétaire; mais elle doit éprouver de la part des autres planètes, et principalement de Jupiter et de Saturne, des perturbations considérables qu'il importe de déterminer. C'est ce que je me propose de faire dans la suite de cet ouvrage, lorsque l'observation aura fait connoître avec une approximation suffisante, les élémens de son orbite.

Il n'y a pas encore trois siècles, que Copernic introduisit le premier, dans les tables astronomiques, le mouvement des planètes autour du soleil : environ un siècle après, Kepler y fit entrer les

loix du mouvement elliptique, qu'il avoit reconnues par l'observation, et qui ont conduit Newton à la découverte de la gravitation universelle. Depuis ces trois époques mémorables dans l'histoire des sciences, les progrès de l'analyse infinitésimale nous ont mis à portée de soumettre au calcul, les nombreuses inégalités des planètes, qui naissent de leur attraction réciproque; et par ce moyen, les tables ont acquis une précision inattendue. J'ose croire que les résultats suivans leur donneront une précision plus grande encore.

CHAPITRE PREMIER.

Formules des inégalités planétaires dépendantes des carrés et des puissances supérieures des excentricités et des inclinaisons des orbites.

Des inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons.

1. Pour déterminer ces inégalités, je reprends l'équation du n°. 46 du second livre,

$$0=\frac{d^2.r\delta r}{dt^2}+\frac{\mu.r\delta r}{r^3}+2.\int dR+r.\left(\frac{dR}{dr}\right).$$

On a par les n°s 20 et 22 du même livre,

$$\frac{\mu}{a^3}=n^2;$$

$$r=a.\{1+\tfrac{1}{2}e^2-e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)-\tfrac{1}{2}e^2.\cos.(2nt+2\varepsilon-2\varpi)\};$$

l'équation différentielle précédente devient ainsi,

$$0=\frac{d^2.r\delta r}{dt^2}+n^2.r\delta r+3n^2a.\delta r.\{e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)+e^2.\cos.(2nt+2\varepsilon-2\varpi)\}$$
$$+2.\int dR+r.\left(\frac{dR}{dr}\right).$$

Maintenant, tous les termes de l'expression de R, dépendans du carré et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites, peuvent être ramenés à l'une ou à l'autre de ces deux formes,

$$M.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+K\};$$
$$N.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+L\};$$

i étant susceptible de toutes les valeurs entières positives et négatives, en y comprenant zéro. Considérons d'abord la première forme. Elle donne dans $2.\int dR+r.\left(\frac{dR}{dr}\right)$, la fonction

$$\left\{\frac{2.(2-i).n}{in'+(2-i).n}.M+a.\left(\frac{dM}{da}\right)\right\}.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+K\}.$$

On a vu dans le second livre, que la partie de $\frac{\delta r}{a}$, qui dépend des angles $i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$ et $i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon$, est de cette forme,

$$F.\cos.i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+eG.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi\}$$
$$+e'H.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi'\};$$

la fonction

$$3n^2.a\delta r.\{e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)+e^2.\cos.(2nt+2\varepsilon-2\varpi)\}$$

produira donc la suivante,

$$\tfrac{3}{2}.n^2a^2.\left\{\begin{array}{l}(F+G).e^2.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon-2\varpi\}\\ +H.ee'.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon-\varpi-\varpi'\}\end{array}\right\};$$

ainsi, en n'ayant égard qu'aux termes dépendans de l'angle $i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt$, et en observant que si l'on fait $\mu=1$, ce qui revient à prendre pour unité de masse, celle du soleil, en négligeant la masse de la planète; on a $n^2a^3=1$; l'équation différentielle en $r\delta r$ devient,

$$0=\frac{d^2.r\delta r}{dt^2}+n^2.r\delta r+\tfrac{3}{2}.n^2a^2.\left\{\begin{array}{l}(F+G).e^2.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon-2\varpi\}\\ +H.ee'.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon-\varpi-\varpi'\}\end{array}\right\}$$
$$+n^2a^2.\left\{\frac{2.(2-i).n}{in'+(2-i).n}.aM+a^2.\left(\frac{dM}{da}\right)\right\}.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+K\};$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$\frac{r\delta r}{a^2}=\frac{\left\{\begin{array}{l}\tfrac{3}{2}n^2.\left\{\begin{array}{l}(F+G).e^2.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon-2\varpi\}\\ +H.ee'.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon-\varpi-\varpi'\}\end{array}\right\}\\ +\left\{\frac{2.(2-i).n}{in'+(2-i).n}.aM+a^2.\left(\frac{dM}{da}\right)\right\}.n^2.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+K\}\end{array}\right\}}{\{i.n'+(3-i).n\}.\{in'+(1-i).n\}};\ (A)$$

Si cette expression de $\frac{r\delta r}{a^2}$ est considérable, et si l'un des diviseurs $in'+(3-i)n$, $in'+(1-i).n$ est très-petit, comme cela a lieu dans la théorie de Jupiter troublé par Saturne, lorsque l'on suppose $i=5$, $2n$ étant à très-peu près égal à $5n'$; la variabilité des élémens des orbites a une influence sensible sur cette expression; il importe donc d'y avoir égard. Pour cela, nous mettrons l'équation différentielle en $r\delta r$, sous cette forme,

$$0=\frac{d^2.r\delta r}{dt^2}+n^2.r\delta r+n^2.a^2.P.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon\}$$
$$+n^2.a^2.P'.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon\}.$$

En l'intégrant et négligeant les termes dépendans des différences secondes et supérieures de P et de P', nous aurons,

$$\frac{r\delta r}{a^2} = \frac{n^2}{\{in'+(3-i).n\}.\{in'+(1-i).n\}}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\left\{P+\dfrac{2.\{i.(n'-n)+2n\}.\dfrac{dP'}{dt}}{\{in'+(3-i)n\}.\{in'+(1-i).n\}}\right\}.\cos.\{i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon\} \\ +\left\{P'-\dfrac{2.\{i(n'-n)+2n\}.\dfrac{dP}{dt}}{\{in'+(3-i).n\}.\{in'+(1-i).n\}}\right\}.\sin.\{i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon\}\end{array}\right\};(B)$$

La formule (Y) du n°. 46 du second livre deviendra en y faisant $\mu=1$,

$$\delta v = \frac{\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2.d(r\delta r)}{a^2.ndt}-\frac{1}{2}.\left\{\begin{array}{l}(F+G).e^2.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon-2\varpi\} \\ +H.ee'.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon-\varpi-\varpi'\}\end{array}\right\} \\ +\left\{\dfrac{(6-3i).n^2}{\{in'+(2-i).n\}^2}.aM.+\dfrac{2n.a^2.\left(\dfrac{dM}{da}\right)}{in'+(2-i).n}\right\}.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+K\}\end{array}\right\};(C)}{\sqrt{1-e^2}}$$

En donnant à i, toutes les valeurs entières positives et négatives, en y comprenant zéro; on aura toutes les inégalités dans lesquelles le coefficient de nt surpasse ou est surpassé par celui de $n't$, de deux unités.

Si le coefficient $in'+(2-i).n$ est très-petit, et si cette inégalité est très-sensible, comme cela a lieu dans la théorie d'Uranus troublé par Saturne; alors on mettra la partie de R, dépendante de l'angle $i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon$, sous la forme suivante:

$$Q.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon\}$$
$$+Q'.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon\};$$

et l'on aura

$$3a.\int\int ndt.\mathrm{d}R = \frac{(6-3i).n^2a}{\{in'+(2-i).n\}^2}.\left\{Q+\frac{2.\dfrac{dQ'}{dt}}{in'+(2-i).n}\right\}.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon\}$$
$$-\frac{(6-3i).n^2a}{\{in'+(2-i).n\}^2}.\left\{Q'-\frac{2.\dfrac{dQ}{dt}}{in'+(2-i).n}\right\}.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon\};$$

La formule (Y) du n°. 46 du second livre, donnera ainsi,

$$\delta v = \frac{2 \cdot d(r\delta r)}{a^2 . ndt} - \tfrac{1}{2} . \left\{ \begin{array}{l} (F+G) . e^2 . \sin. \{ i.(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - 2\varpi \} \\ + H . ee' . \sin. \{ i.(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi - \varpi' \} \end{array} \right\} \qquad (D)$$

$$+ \left\{ \frac{(6-3i).n^2}{\{in' + (2-i).n\}^2} . \left\{ a.Q + \frac{2a . \frac{dQ'}{dt}}{in' + (2-i).n} \right\} + \frac{2na^2 . \left(\frac{dQ}{da}\right)}{in' + (2-i).n} \right\} . \sin. \{ i.(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon \}$$

$$- \left\{ \frac{(6-3i).n^2}{\{in' + (2-i).n\}^2} . \left\{ a.Q' - \frac{2a . \frac{dQ}{dt}}{in' + (2-i).n} \right\} + \frac{2na^2 . \left(\frac{dQ'}{da}\right)}{in' + (2-i).n} \right\} . \cos. \{ i.(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon \}.$$

Je supprime pour plus d'exactitude, le diviseur $\sqrt{1-e^2}$, dans cette expression de δv; parce que ce diviseur n'affecte point, comme on l'a vu dans le n°. 65 du second livre, la partie de cette expression, qui a pour diviseur le carré de $in' + (2-i).n$; et dans le cas présent, cette partie est beaucoup plus grande que les autres. De plus, en vertu du même n°., il faut appliquer cette partie de δv, au moyen mouvement de la planète m; et comme elle est à fort peu près égale à l'inégalité entière dépendante de l'angle $i.(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon$; on peut appliquer cette inégalité entière, au moyen mouvement de m.

On aura les valeurs de $\frac{dP}{dt}$, $\frac{dP'}{dt}$, $\frac{dQ}{dt}$ et $\frac{dQ'}{dt}$, en différentiant les expressions de P, P', Q, Q', par rapport aux excentricités et aux inclinaisons des orbites, aux positions de leurs périhélies et de leurs nœuds, et en substituant au lieu des différences de ces quantités, leurs valeurs. Mais on aura plus simplement ces valeurs de $\frac{dP}{dt}$, &c. de la manière suivante. On déterminera la valeur de P, pour une époque éloignée de deux cents ans, de la première époque à laquelle on fixe l'origine du temps t. En nommant $P_{\prime}$ cette valeur, et T l'intervalle de deux cents années; on aura

$$T . \frac{dP}{dt} = P_{\prime} - P.$$

On aura par le même procédé, les valeurs de $\frac{dP'}{dt}$, $\frac{dQ}{dt}$, $\frac{dQ'}{dt}$.

Pour conclure l'expression de $\frac{\delta r}{a}$, de celle de $\frac{r\delta r}{a^2}$, nous désignerons

gnerons par $\frac{\delta_{\prime}r}{a}$, la partie de $\frac{\delta r}{a}$ qui dépend de l'angle $i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$ $+2nt+2\varepsilon$, et nous aurons

$$\frac{r\delta r}{a^2}=\frac{r}{a}.\left\{\begin{array}{l}\frac{\delta_{\prime}r}{a}+F.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+eG.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi\}\\ +e'H.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi'\}\end{array}\right\};$$

d'où l'on tire

$$\frac{\delta_{\prime}r}{a}=\frac{r\delta r}{a^2}+\tfrac{1}{4}.(F+2G).e^2.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon-2\varpi\}$$
$$+\tfrac{1}{2}ee'.H.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon-\varpi-\varpi'\}.$$

2. En considérant de la même manière, les termes dépendans de l'angle $i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$, et supposant que l'on ait, en ne portant l'approximation que jusqu'aux premières puissances des excentricités,

$$\begin{aligned}\frac{\delta r}{a}=F.\cos.i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)&+eG.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi\}\\ &+eG'.\cos.\{-i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi\}\\ &+e'H.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi'\}\\ &+e'H'.\cos.\{-i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi'\},\end{aligned}$$

i étant ici positif; on aura

$$\frac{r\delta r}{a^2}=\frac{\left\{\begin{array}{l}\tfrac{3}{2}n^2.\left\{\begin{array}{l}(G+G').e^2.\cos.i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\ +Hee'.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+\varpi-\varpi'\}\\ +H'ee'.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)-\varpi+\varpi'\}\end{array}\right\}\\ +n^2.\left\{a^2.\left(\frac{dN}{da}\right)-\frac{2n}{n'-n}.aN\right\}.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+L\}\end{array}\right\}}{\{in'-(i+1).n\}.\{in'-(i-1).n\}};\quad (E)$$

$$\delta v=\frac{\left\{\begin{array}{l}\frac{2.d(r\delta r)}{a^2.ndt}+\tfrac{1}{2}.\left\{\begin{array}{l}(G-G').e^2.\sin.i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\ +Hee'.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+\varpi-\varpi'\}\\ -Hee'.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)-\varpi+\varpi'\}\end{array}\right\}\\ +\left\{\frac{2n}{in'-in}.a^2.\left(\frac{dN}{da}\right)-\frac{3n^2i}{(in'-in)^2}.aN\right\}.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+L\}\end{array}\right\}}{\sqrt{1-e^2}};\quad (F)$$

Si l'on désigne par $\frac{\delta_{\prime}r}{a}$, la partie qui dépend à la fois des carrés des excentricités et des inclinaisons des orbites, et de l'angle $i.(n't+nt+\varepsilon'-\varepsilon)$; on aura

$$\frac{\delta_1 r}{a} = \frac{r\delta r}{a^2} + \tfrac{1}{2}.\{G+G'-F\}.e^2.\cos.i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$$
$$+\tfrac{1}{2}.Hee'.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+\varpi-\varpi'\}$$
$$+\tfrac{1}{2}.H'.ee'.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)-\varpi+\varpi'\}.$$

Dans ces trois expressions, i doit être supposé positif.

3. Le grand nombre des inégalités dépendantes des carrés des excentricités et des inclinaisons, ne permet pas de les calculer toutes : on se dirigera dans leur choix, par les considérations suivantes. 1°. Si la quantité $in'+(2-i).n$ diffère peu de $\pm n$; alors, l'un ou l'autre des diviseurs $in'+(3-i).n$, et $in'+(1-i).n$ de la formule (A) du n°. 1, est peu considérable, et par-là, cette formule peut acquérir une valeur sensible. 2°. Si la quantité $in'+(2-i).n$ est peu considérable; les termes de la formule (C) du même n°. qui ont cette quantité pour diviseur, peuvent devenir sensibles. 3°. Si la quantité $i.(n'-n)$ diffère peu de $\pm n$; l'un ou l'autre des diviseurs $in'-(i+1).n$, et $in'-(i-1).n$, de la formule (E) du n°. précédent, est peu considérable, et par-là, cette formule peut acquérir une valeur sensible. 4°. Enfin, si la quantité $i.(n'-n)$ est peu considérable; les termes de la formule (F) du n°. précédent, qui ont ce diviseur, peuvent devenir sensibles. Il faut donc calculer avec soin, toutes les inégalités assujéties à l'une de ces quatre conditions.

4. Les quantités F, G, G', H, H', sont déterminées par les approximations développées dans le second livre : nous allons déterminer M et N. Pour cela, reprenons la valeur de R du n°. 46 du second livre,

$$R = \frac{m'.(xx'+yy'+zz')}{r'^3} - \frac{m'}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}};$$

r' étant ici le rayon vecteur de m'. Prenons pour plan fixe, celui de l'orbite primitive de m, et pour ligne des abcisses x, la ligne des nœuds de l'orbite de m' avec ce plan. Si l'on nomme v l'angle formé par r et par cette ligne; v' l'angle formé par cette même ligne et par r'; et γ la tangente de l'inclinaison respective des deux orbites; on aura

$$x = r.\cos.v\ ;\quad y = r.\sin.v;\quad z = 0\ ;$$
$$x' = r'.\cos.v'\ ;\quad y' = \frac{r'.\sin.v'}{\sqrt{1+\gamma^2}};\quad z' = \frac{r'\gamma.\sin.v'}{\sqrt{1+\gamma^2}}\ ;$$

ce qui donne, en négligeant les quatrièmes puissances de γ,

$$R = \frac{m'r}{r'^2}.\cos.(v'-v) - \frac{m'\gamma^2}{4}.\frac{r}{r'^2}.\{\cos.(v'-v) - \cos.(v'+v)\}$$
$$- \frac{m'}{\sqrt{r^2-2rr'.\cos.(v'-v)+r'^2}} + \frac{m'\gamma^2}{4}.\frac{rr'.\{\cos.(v'-v)-\cos.(v'+v)\}}{\{r^2-2rr'.\cos.(v'-v)+r'^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Supposons, comme dans le n°. 48 du second livre,

$$\frac{a}{a'^2}.\cos.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon) - \{a^2-2aa'.\cos.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+a'^2\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \tfrac{1}{2}.\Sigma.A^{(i)}.\cos.i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\ ;$$

$$\{a^2-2aa'.\cos.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+a'^2\}^{-\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{2}.\Sigma.B^{(i)}.\cos.i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon);$$

et représentons $M.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+K\}$, par

$$M^{(0)}.\ e^2.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon-2\varpi\}$$
$$+M^{(1)}.ee'.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon-\varpi-\varpi'\}$$
$$+M^{(2)}.\ e'^2.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon-2\varpi'\}$$
$$+M^{(3)}.\ \gamma^2.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon-2\Pi\};$$

Π étant la longitude du nœud ascendant de l'orbite de m', sur celle de m, comptée de la ligne où l'on fixe l'origine de $nt+\varepsilon$. On a par le n°. 22 du second livre,

$$\frac{r}{a} = 1+\tfrac{1}{2}e^2 - e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi) - \tfrac{1}{2}e^2.\cos.(2nt+2\varepsilon-2\varpi);$$
$$v = nt+\varepsilon-\Pi+2e.\sin.(nt+\varepsilon-\varpi)+\tfrac{5}{4}e^2.\sin.(2nt+2\varepsilon-2\varpi);$$

ce qui donne les valeurs de $\frac{r'}{a'}$ et de v', en marquant d'un trait les quantités n, ε et e. On a ensuite, par le n°. 48 du même livre, le produit de $\Sigma.A^{(i)}.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$, par le sinus ou le cosinus d'un angle quelconque $ft+I$, égal à

$$\Sigma.A^{(i)}.\frac{\sin.}{\cos.}\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+ft+I\}.$$

De là il est facile de conclure,

$$M^{(0)} = \frac{m'}{8}.\left\{i.(4i-5).A^{(i)}+2.(2i-1).a.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)+a^2.\left(\frac{ddA^{(i)}}{da^2}\right)\right\};$$

$$M^{(1)} = -\frac{m'}{4}.\left\{4.(i-1)^2.A^{(i-1)}+2.(i-1).a.\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da}\right)-2.(i-1).a'.\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da'}\right)-aa'.\left(\frac{ddA^{(i-1)}}{da\,da'}\right)\right.$$

$$M^{(2)} = \frac{m'}{8}.\left\{(i-2).(4i-3).A^{(i-2)}-2.(2i-3).a'.\left(\frac{dA^{(i-2)}}{da'}\right)+a'^2.\left(\frac{ddA^{(i-2)}}{da'^2}\right)\right\};$$

$$M^{(3)} = -\frac{m'}{8}.aa'.B^{(i-1)},$$

et dans le cas de $i=1$,

$$M^{(3)} = \frac{m'}{4}.\frac{a}{a'^2} \quad -\frac{m'}{8}.aa'.B^{(0)}.$$

Représentons $N.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+L\}$, par les termes suivans,

$$N^{(0)}.\cos.i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$$
$$+N^{(1)}.ee'.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+\varpi-\varpi'\}$$
$$+N^{(2)}.ee'.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)-\varpi+\varpi'\};$$

nous aurons

$$N^{(0)} = -\frac{m'}{4}.\left\{(e^2+e'^2).\left\{4i^2.A^{(i)}-2a.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)-a^2.\left(\frac{ddA^{(i)}}{da^2}\right)\right\}-\frac{\gamma^2}{2}.aa'.\{B^{(i-1)}+B^{(i+1)}\}\right\}$$

$$N^{(1)} = \frac{m'}{4}.\left\{4.(i-1)^2.A^{(i-1)}-2.(i-1).a.\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da}\right)-2.(i-1).a'.\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da'}\right)+aa'.\left(\frac{ddA^{(i-1)}}{da\,da'}\right)\right.$$

$$N^{(2)} = \frac{m'}{4}.\left\{4.(i+1)^2.A^{(i+1)}+2.(i+1).a.\left(\frac{dA^{(i+1)}}{da}\right)+2.(i+1).a'.\left(\frac{dA^{(i+1)}}{da'}\right)+aa'.\left(\frac{ddA^{(i+1)}}{da\,da'}\right)\right.$$

i étant supposé positif et plus grand que zéro, dans ces trois dernières expressions. Dans le cas de $i=1$, il faut ajouter à $N^{(0)}$ le terme $-\frac{m'\gamma^2}{4}.\frac{a}{a'^2}$.

Il est plus commode pour les calculs numériques, de n'avoir dans les formules, que les différences relatives à l'une ou à l'autre des deux quantités a et a'. On trouve alors par le n°. 49 du second livre,

$$M^{(1)} = -\frac{m'}{4}.\left\{(2i-2).(2i-1).A^{(i-1)}+2.(2i-1).a.\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da}\right)+a^2.\left(\frac{ddA^{(i-1)}}{da^2}\right)\right\};$$

$$M^{(2)} = \frac{m'}{8}.\left\{(4i^2-7i+2).A^{(i-2)}+2.(2i-1).a.\left(\frac{dA^{(i-2)}}{da}\right)+a^2.\left(\frac{ddA^{(i-2)}}{da^2}\right)\right\};$$

$$N^{(1)} = \frac{m'}{4}.\left\{(2i-2).(2i-1).A^{(i-1)}-2a.\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da}\right)-a^2.\left(\frac{ddA^{(i-1)}}{da^2}\right)\right\};$$

$$N^{(2)} = \frac{m'}{4}.\left\{(2i+2).(2i+1).A^{(i+1)}-2a.\left(\frac{dA^{(i+1)}}{da}\right)-a^2.\left(\frac{ddA^{(i+1)}}{da^2}\right)\right\}.$$

5. Le cas de $i=0$, mérite une attention particulière. Reprenons la formule (T) du n°. 46 du second livre, et considérons d'abord le terme $\frac{d.(2r.d\delta r+dr.\delta r)}{r^2 dv}$, de l'expression de $d\delta v$, donnée par cette formule. On a par le n°. 53 du même livre, et en n'ayant égard qu'aux termes affectés de l'arc de cercle nt,

$$\frac{r}{a}=1-h.\sin.(nt+\varepsilon)-l.\cos.(nt+\varepsilon);$$

$$\frac{\delta r}{a}=\frac{m'}{2}.(lC+l'D).nt.\sin.(nt+\varepsilon)$$
$$-\frac{m'}{2}.(hC+h'D).nt.\cos.(nt+\varepsilon);$$

ce qui donne, en ne considérant que les termes dépendans des carrés et des produits de h, l, h', l', et indépendans des sinus et cosinus de $nt+\varepsilon$, et de ses multiples,

$$d.(2r.d\delta r+dr.\delta r)=-\frac{m'.n^2a^2.dt^2}{4}.\{(h^2+l^2).C+(hh'+ll').D\}.$$

On a ensuite, par les n°s 19 et 20 du second livre, $r^2dv=a^2ndt.\sqrt{1-e^2}$; on aura donc

$$\frac{d.(2r.d\delta r+dr.\delta r)}{r^2.dv}=-\frac{m'ndt}{4}.\{(h^2+l^2).C+(hh'+ll').D\}.$$

On a par le n°. 55 du second livre,

$$(0,1)=-\frac{m'n.C}{2}; \qquad \boxed{0,1}=\frac{m'n.D}{2};$$

partant,

$$\frac{d.(2r.d\delta r+dr.\delta r)}{r^2.dv}=\tfrac{1}{2}.dt.\{(0,1).(h^2+l^2)-\boxed{0,1}.(hh'+ll')\}.$$

Considérons ensuite le terme $\frac{3.dt^2.\int\delta dR}{r^2dv}$, de la même formule ($T$). Si l'on n'a égard qu'aux quantités séculaires dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites; on aura par l'analyse du n°. précédent,

$$\delta R = \frac{m'}{8}.(h^2+l^2).\left\{2a.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)+a^2.\left(\frac{ddA^{(0)}}{da^2}\right)\right\}$$
$$+\frac{m'}{8}.(h'^2+l'^2).\left\{2a'.\left(\frac{dA^{(0)}}{da'}\right)+a'^2.\left(\frac{ddA^{(0)}}{da'^2}\right)\right\}$$
$$+\frac{m'}{4}.(hh'+ll').\left\{4A^{(1)}+2a.\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right)+2a'.\left(\frac{dA^{(1)}}{da'}\right)+aa'.\left(\frac{ddA^{(1)}}{da\,da'}\right)\right\}$$
$$+\frac{m'}{8}.aa'.B^{(1)}.\{(p'-p)^2+(q'-q)^2\};$$

p, p', q, q', exprimant les mêmes choses que dans le n°. 51 du second livre. De-là il est facile de conclure, par les n°s 55 et 59 du second livre,

$$an.\delta R = -\frac{(0,1)}{2}.\{h^2+l^2+h'^2+l'^2\}+\boxed{0,1}.(hh'+ll')$$
$$+\tfrac{1}{2}.(0,1).\{(p'-p)^2+(q'-q)^2\};$$

ce qui donne

$$an.\mathrm{d}\delta R = dh.\{-(0,1).h+\boxed{0,1}.h'\}+dl.\{-(0,1).l+\boxed{0,1}.l'\}$$
$$+(0,1).dp.(p-p')+(0,1).dq.(q-q').$$

Le second membre de cette équation devient nul, en vertu des équations (A) et (C) des n°s 55 et 59 du second livre; on a donc

$$an.\mathrm{d}.\delta R = 0;$$

d'où l'on tire, en observant que $n^2a^3 = 1$,

$$3\,dt.\int dt.\mathrm{d}\delta R = -\frac{3m'g\,dt}{na^2.\sqrt{1-e^2}};$$

$m'g$ étant une constante arbitraire ajoutée à l'intégrale $\int \mathrm{d}.\delta R$.

Il nous reste à considérer la fonction $\frac{dt^2.(2r\delta R'+R'\delta r)}{r^2.dv}$ qui entre dans l'expression de $d\delta v$, donnée par la formule (T) du n°. 46 du second livre. En négligeant le carré de la force perturbatrice, cette fonction se réduit à $\frac{2.\delta.(rR').dt^2}{r^2.dv}$, ou par le n°. cité, à $\frac{2a^2.\left(\frac{d\delta R}{da}\right).ndt}{\sqrt{1-e^2}}$. Cette quantité produit d'abord le terme $-\frac{m'ndt.a^2\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)}{\sqrt{1-e^2}}$, qui ajouté à celui-ci, $-\frac{3m'.gdt}{na^2.\sqrt{1-e^2}}$ égal à $\frac{3m'.agndt}{\sqrt{1-e^2}}$, à cause de $n^2a^3=1$, le détruit; parce que $g = -\frac{1}{3}a.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)$, par le n°. 50 du

second livre. Reprenant ensuite l'expression précédente de δR, nous observerons que la fonction

$$\frac{m'}{8} \cdot aa' \cdot B^{(1)} \cdot \{(p'-p)^2+(q'-q)^2\} + \&c.$$

est égale à une constante indépendante du temps t; puisque sa différentielle est nulle en vertu des équations (C) du n°. 59 du second livre; et si l'on ne considère que les deux planètes m et m', comme nous le ferons dans ce qui va suivre, $(p'-p)^2+(q'-q)^2$ est en vertu des mêmes équations, une quantité indépendante du temps; la fonction précédente ne peut donc produire dans $\frac{2ndt \cdot a^2 \cdot \left(\frac{d\delta R}{da}\right)}{\sqrt{1-e^2}}$, qu'une quantité pareillement indépendante du temps, et que l'on peut ainsi négliger, puisqu'elle peut être supposée se confondre avec la valeur de ndt. On aura donc, en faisant disparoître les différences partielles de $A^{(0)}$ et de $A^{(1)}$ en a', au moyen de leurs valeurs données dans le n°. 49 du second livre,

$$2ndt.a^2.\left(\frac{d\delta R}{da}\right)=\frac{m'ndt}{2}.\{h^2+l^2+h'^2+l'^2\}.\left\{a^2.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)+2a^3.\left(\frac{ddA^{(0)}}{da^2}\right)+\tfrac{1}{2}a^4.\left(\frac{d^3A^{(0)}}{da^3}\right)\right\}$$
$$-m'ndt.(hh'+ll').\left\{2a^3.\left(\frac{ddA^{(1)}}{da^2}\right)+\tfrac{1}{2}a^4.\left(\frac{dA^{(1)}}{da^3}\right)\right\}.$$

Si l'on rassemble ces différens termes, on aura

$$d.\delta v=\frac{m'.ndt}{8}.(h^2+l^2).\left\{2a^2.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)+7.a^3.\left(\frac{ddA^{(0)}}{da^2}\right)+2a^4.\left(\frac{d^3A^{(0)}}{da^3}\right)\right\}$$
$$+\frac{m'.ndt}{4}.(h'^2+l'^2).\left\{2a^2.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)+4a^3.\left(\frac{ddA^{(0)}}{da^2}\right)+a^4.\left(\frac{d^3A^{(0)}}{da^3}\right)\right\}$$
$$-\frac{m'.ndt}{8}.(hh'+ll').\left\{2a.A^{(1)}-2a^2.\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right)+15a^3.\left(\frac{ddA^{(1)}}{da^2}\right)+4a^4.\left(\frac{d^3A^{(1)}}{da^3}\right)\right\}.$$

On pourra dans cette expression, négliger les termes indépendans du temps t. Il est facile d'en conclure l'expression de $d\delta v'$, en changeant ce qui est relatif à m, dans ce qui est relatif à m', et réciproquement; et en observant que quoique la valeur de $A^{(1)}$ relative à l'action de m' sur m, soit par le n°. 49 du second livre, différente de sa valeur relative à l'action de m sur m'; cependant on peut, dans l'expression précédente, employer indifféremment l'une ou l'autre valeur. Mais on obtiendra plus facilement $d.\delta v$,

par la considération suivante. Si l'on ajoute la valeur de $d\delta v$, multipliée par $m\sqrt{a}$, à la valeur de $d\delta v'$, multipliée par $m'\sqrt{a'}$; on aura, en substituant au lieu des différences partielles de $A^{(0)}$ et de $A^{(1)}$ en a', leurs différences partielles en a,

$$m\sqrt{a}.d\delta v+m'\sqrt{a'}.d\delta v'=-\frac{3mm'.dt}{4}.\{h^2+l^2+h'^2+l'^2\}.\left\{a.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)+\tfrac{1}{2}a^2.\left(\frac{ddA^{(0)}}{da^2}\right)\right\}$$
$$-\frac{3mm'.dt}{4}.\{hh'+ll'\}.\left\{A^{(1)}-a.\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right)-\tfrac{1}{2}a^2.\left(\frac{ddA^{(1)}}{da^2}\right)\right\}.$$

Si l'on ne considère que deux planètes m et m'; la différentielle du second membre de cette équation est nulle en vertu des équations (A) du n°. 55 du second livre; on a donc, en ne considérant que les quantités périodiques séculaires,

$$0=m.\sqrt{a}.d\delta v+m'\sqrt{a'}.d\delta v';$$

ce qui donne immédiatement $\delta v'$, lorsque l'on a déterminé δv.

La valeur de $d\delta v$ est relative à l'angle compris entre les deux rayons vecteurs r et $r+dr$. Pour avoir sa valeur relative à un plan fixe, nous observerons que par le n°. 46 du second livre, si l'on nomme $dv_{,}$ la projection de dv sur ce plan; on a, en négligeant les quatrièmes puissances de l'inclinaison de l'orbite,

$$dv_{,}=dv.\left\{1+\tfrac{1}{2}s^2-\tfrac{1}{2}.\frac{ds^2}{dv^2}\right\}.$$

On a par le n°. 53 du second livre,

$$s=q.\sin.(nt+\epsilon)-p.\cos.(nt+\epsilon)+\&c.$$

ce qui donne

$$ds=\left(nq-\frac{dp}{dt}\right).dt.\cos.(nt+\epsilon)+\left(np+\frac{dq}{dt}\right).dt.\sin.(nt+\epsilon)+\&c.;$$

on aura donc, en négligeant les quantités périodiques dépendantes de nt, et en observant que $dv=ndt$, à très-peu près,

$$dv_{,}=dv+\frac{qdp-pdq}{2};$$

ainsi, pour avoir la valeur de $d\delta v_{,}$, il faut ajouter à la valeur précédente de $d.\delta v$, la quantité $\frac{qdp-pdq}{2}$.

Si l'on ne considère que deux planètes m et m'; on aura par le n°. 59 du second livre,

$$(qdp-pdq).m\sqrt{a}+(q'dp'-p'dq').m'\sqrt{a'}=-\frac{mm'.dt}{4}.aa'.B^{(1)}.\{(p'-p)^2+(q'-q)^2\};$$

et

et le second membre de cette équation est égal à dt multiplié par une constante ; en n'ayant donc égard qu'aux quantités périodiques séculaires, on aura

$$0 = m.\sqrt{a}.d\delta v_1 + m'.\sqrt{a'}.d\delta v_1';$$

δv_1 et $\delta v_1'$ étant relatifs au plan fixe.

6. Considérons maintenant les inégalités du mouvement en latitude, dépendantes des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites ; reprenons la troisième des équations (P) du n°. 46 du second livre,

$$0 = \frac{ddz}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} + \left(\frac{dR}{dz}\right).$$

Prenons pour plan fixe, celui de l'orbite primitive de m, ce qui permet de supposer z nul dans $\left(\frac{dR}{dz}\right)$. On aura par le n°. 4, et observant que $z' = r's'$,

$$\left(\frac{dR}{dz}\right) = \frac{m's'}{r'^2} - \frac{m'.r's'}{\{r^2 - 2rr'.\cos.(v'-v) + r'^2\}^{\frac{3}{2}}};$$

l'équation différentielle en z deviendra ainsi,

$$0 = \frac{ddz}{dt^2} + n^2z.\{1 + 3e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)\}$$
$$+ \frac{m'.n^2a^3.s'}{r'^2} - \frac{m'.n^2a^3.r's'}{\{r^2-2rr'.\cos.(v'-v)+r'^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Représentons par

$M.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+K\}+N.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+L\}$,

la partie de

$$\frac{m's'}{r'^2} - \frac{m'.r's'}{\{r^2-2rr'.\cos.(v'-v)+r'^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

dépendante des angles $i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt$, et $i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$; et supposons qu'en n'ayant égard qu'aux inégalités de z, dépendantes de la simple inclinaison des orbites, la partie de z relative à l'angle $i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt$ soit

$$\gamma a F.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\Pi\};$$

on aura, en ne conservant que les termes dépendans des produits des excentricités et des inclinaisons,

$$0 = \frac{ddz}{dt^2} + n^2.z + \tfrac{3}{2}.n^2.e\gamma.aF.\begin{Bmatrix} \sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon-\varpi-\Pi\} \\ +\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+\varpi-\Pi\} \end{Bmatrix}$$
$$+n^2a^3.M.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+K\}$$
$$+n^2a^3.N.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+L\};$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$z = \frac{\begin{Bmatrix} \tfrac{3}{2}.n^2.e\gamma.aF.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon-\varpi-\Pi\} \\ +n^2a^3.M.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+K\} \end{Bmatrix}}{\{in'-(i-1).n\}.\{in'-(i-3).n\}}$$
$$+\frac{\begin{Bmatrix} \tfrac{3}{2}.n^2.e\gamma.aF.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+\varpi-\Pi\} \\ +n^2.a^3.N.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+L\} \end{Bmatrix}}{\{in'-(i+1).n\}.\{in'-(i-1).n\}}.$$

On aura la latitude s, en observant que

$$s = \frac{z}{r} = \frac{z}{a}.\{1+e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)\};$$

on aura donc s, en divisant l'expression précédente de z par a, et en lui ajoutant la quantité

$$\tfrac{1}{2}e\gamma.F.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon-\varpi-\Pi\}$$
$$+\tfrac{1}{2}e\gamma.F.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+\varpi-\Pi\}.$$

Il ne s'agit plus que de déterminer M et N; ce qui sera facile, en suivant l'analyse du n°. 4. Mais nous nous dispenserons de suivre ce calcul; parce que les inégalités de cet ordre en latitude, sont insensibles, excepté relativement à Jupiter et à Saturne, à cause de la commensurabilité très-approchée de leurs moyens mouvemens, et nous donnerons dans le n°. 10 un moyen très-simple de déterminer ces dernières inégalités.

Si l'on rapporte le mouvement de m, sur un plan fixe très-peu incliné à celui de son orbite primitive; en nommant φ l'inclinaison de cette orbite sur ce plan, et θ la longitude de son nœud ascendant; la réduction du mouvement sur l'orbite à ce plan, sera par le n°. 22 du second livre,

$$-\tfrac{1}{4}.\text{tang.}^2\varphi.\sin.(2v_1-2\theta)-\text{tang.}\varphi.\delta s.\cos.(v_1-\theta);$$

$v_{\prime}$ étant le mouvement v rapporté au plan fixe. Ainsi, le mouvement en latitude, introduit dans le mouvement en longitude sur l'écliptique, des inégalités dépendantes des carrés et des puissances supérieures des excentricités et des inclinaisons des orbites. Mais ces inégalités sont insensibles, excepté pour Jupiter et Saturne.

En ne considérant que les quantités séculaires, et observant que

$$\text{tang.}\varphi.\sin.\theta = p\ ; \qquad \text{tang.}\varphi.\cos.\theta = q\ ;$$

on aura

$$\delta s = t.\frac{dq}{dt}.\sin.(nt+\varepsilon) - t.\frac{dp}{dt}.\cos.(nt+\varepsilon).$$

Le terme $-\text{tang.}\varphi.\delta s.\cos.(v_{\prime}-\theta)$ donnera ainsi le suivant, $\frac{t.(qdp-pdq)}{2dt}$; en sorte que l'on aura

$$v_{\prime} = v + t.\frac{(qdp-pdq)}{2dt};$$

ce qui est conforme à ce que nous avons trouvé dans le n°. précédent.

Des inégalités dépendantes des cubes et des produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites, et de leurs puissances supérieures.

7. Les inégalités dépendantes des cubes et des produits de trois dimensions, des excentricités et des inclinaisons des orbites, sont susceptibles de ces deux formes,

$$M.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+3nt+K\};$$
$$N.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+L\}.$$

On peut les déterminer par l'analyse dont nous avons fait usage dans les n^{os}. précédens; mais comme elles ne deviennent très-sensibles, qu'autant qu'elles croissent avec une extrême lenteur; cette considération simplifie leur calcul. Reprenons la formule (Y) du n°. 46 du second livre : on peut y négliger le terme $\frac{2.d(r\delta r)}{a^2.ndt}$ qui est alors insensible, à cause de la petitesse du coëfficient de t, dans les inégalités dont il s'agit. Cette formule devient ainsi,

$$\delta v = -\frac{dr.\delta r}{a^2.ndt} + 3a.\int\int ndt.\mathrm{d}R + 2.\int ndt.a^2.\left(\frac{dR}{da}\right);$$

le diviseur $\sqrt{1-e^2}$ de cette formule, devant être supprimé pour plus d'exactitude, par le n°. 54 du second livre. Il faut de plus, par ce même n°, appliquer dans la partie elliptique du mouvement de m, ces inégalités, au moyen mouvement de cette planète. Cela posé, si l'on suppose,

$$R = m'P.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+3nt+3\varepsilon\}$$
$$+m'P'.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+3nt+3\varepsilon\};$$

ce qui comprend tous les termes de R, dans lesquels le coëfficient de nt surpasse ou est surpassé de trois unités, par celui de $n't$; on aura par le n°. 65 du second livre,

$$3a.\int\int ndt.\mathrm{d}R = \frac{3.(3-i).m'n^2.a}{\{i.(n'-n)+3n\}^2}$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}\left\{P'+\frac{2.dP}{\{i.(n'-n)+3n\}.dt}-\frac{3.ddP'}{\{i.(n'-n)+3n\}^2.dt^2}\right\}.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+3nt+3\varepsilon\}\\ -\left\{P-\frac{2.dP'}{\{i.(n'-n)+3n\}.dt}-\frac{3.ddP}{\{i.(n'-n)+3n\}^2.dt^2}\right\}.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+3nt+3\varepsilon\}\end{array}\right\}$$

On aura ensuite,

$$2.\int ndt.a^2.\left(\frac{dR}{da}\right) = -\frac{2m'n}{i.(n'-n)+3n}.\left\{\begin{array}{l}a^2.\left(\frac{dP}{da}\right).\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+3nt+3\varepsilon\}\\ -a^2.\left(\frac{dP'}{da}\right).\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+3nt+3\varepsilon\}\end{array}\right\}.$$

Supposons enfin, qu'en n'ayant égard qu'à l'angle $i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon$, on ait

$$\frac{r\delta r}{a^2} = H.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon+A\};$$

H étant déterminé par ce qui précède, et étant affecté du très-petit diviseur $i.(n'-n)+3n$; le terme $-\frac{dr.\delta r}{a^2.ndt}$ donnera celui-ci,

$$-\frac{eH}{2}.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+3nt+3\varepsilon-\varpi+A\}.$$

On aura ainsi, en ne considérant que les termes qui ont $i.(n'-n)+3n$, pour diviseur,

$$\delta v = \frac{3.(3-i).m'.n^2}{\{i.(n'-n)+3n\}^2}.\left\{\begin{array}{l}\left\{aP'+\frac{2a.dP}{\{i.(n'-n)+3n\}.dt}-\frac{3a.ddP'}{\{i.(n'-n)+3n\}^2.dt^2}\right\}.\sin.\left\{\begin{array}{l}i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\+3nt.+3\varepsilon\end{array}\right\}\\ -\left\{aP-\frac{2a.dP'}{\{i.(n'-n)+3n\}.dt}-\frac{3a.ddP}{\{i.(n'-n)+3n\}^2.dt^2}\right\}.\cos.\left\{\begin{array}{l}i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\+3nt+3\varepsilon\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

$$-\frac{2m'n}{i.(n'-n)+3n}.\left\{\begin{array}{l}a^2.\left(\frac{dP}{da}\right).\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+3nt+3\varepsilon\}\\ -a^2.\left(\frac{dP'}{da}\right).\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+3nt+3\varepsilon\}\end{array}\right\}$$

$$-\frac{eH}{2}.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+3nt+3\varepsilon-\varpi+A\}.$$

L'équation différentielle

$$0=\frac{d^2.(r\delta r)}{dt^2}+\frac{\mu.r\delta r}{r^3}+2.\int \mathrm{d}R+r.\left(\frac{dR}{dr}\right)$$

donne, en ne considérant que les termes qui ont $i.(n'-n)+3n$, pour diviseur,

$$\frac{r\delta r}{a^2}=\frac{2.(i-3).m'n}{i.(n'-n)+3n}.\left\{\begin{array}{l}aP\ .\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+3nt+3\varepsilon\}\\ +aP'.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+3nt+3\varepsilon\}\end{array}\right\}$$
$$-\tfrac{3}{2}eH.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+3nt+3\varepsilon-\varpi+A\}$$
$$+\tfrac{1}{2}eH.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon+\varpi+A\}.$$

En réunissant cette équation à celle-ci,

$$\frac{r\delta r}{a^2}=H.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon+A\};$$

on en tirera

$$\frac{\delta r}{a}=H.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon+A\}$$
$$-eH.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+3nt+3\varepsilon-\varpi+A\}$$
$$+eH\ \cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon+\varpi+A\}$$
$$+\frac{2.(i-3).m'n}{i.(n'-n)+3n}.\left\{\begin{array}{l}aP\ .\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+3nt+3\varepsilon\}\\ +aP'.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+3nt+3\varepsilon\}\end{array}\right\}.$$

Cette valeur de $\frac{\delta r}{a}$ introduit dans δv, une inégalité dépendante de l'angle $i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon$, et qui a pour diviseur $i.(n'-n)+3n$. Pour la déterminer, nous reprendrons l'expression de δv, donnée par la formule (Y) du n°. 46 du second livre. La partie $\frac{2r.d\delta r+dr.\delta r}{a^2.ndt}$ de cette expression, produit dans δv, le terme

$$\tfrac{1}{2}.eH.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon+\varpi+A\}.$$

C'est le seul de ce genre qui ait $i.(n'-n)+3n$ pour diviseur. L'inégalité de δv, dépendante de l'angle $i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon$, est à très-peu-près, par le n°. 1, en n'ayant égard qu'aux termes qui ont $i.(n'-n)+3n$ pour diviseur,

$$2H.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon+A\}.$$

En désignant donc cette inégalité par

$$K.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon+B\};$$

on a dans δv l'inégalité

$$\tfrac{5}{4}eK.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon+\varpi+B\}.$$

8. C'est principalement dans la théorie de Jupiter et de Saturne, que ces diverses inégalités sont sensibles. En supposant $i=5$, la fonction $i.(n'-n)+3n$ devient $5n'-2n$, et cette dernière quantité est très-petite, en vertu du rapport qui existe entre les moyens mouvemens de ces deux planètes, ce qui donne aux inégalités correspondantes de δr, et de δv, de grandes valeurs. Pour les déterminer, reprenons l'expression de R donnée dans le n°. 4. La partie

$$\frac{m'.r}{r'^2}.\cos.(v'-v)-\frac{m'}{4}.\gamma^2.\frac{r}{r'^2}.\{\cos.(v'-v)-\cos.(v'+v)\}$$
$$+\frac{\frac{m'}{4}.\gamma^2.rr'.\cos.(v'-v)}{\{r^2-2rr'.\cos.(v'-v)+r'^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

ne produit aucun terme de l'ordre des cubes des excentricités, et dépendant de l'angle $5n't-2nt$; il ne peut donc en résulter que de la partie

$$-\frac{m'}{\sqrt{r^2-2rr'.\cos.(v'-v)+r'^2}}-\frac{\frac{m'}{4}.\gamma^2.rr'.\cos.(v'+v)}{\{r^2-2rr'.\cos.(v'-v)+r'^2\}^{\frac{3}{2}}};$$

et alors, les valeurs de P et de P' sont les mêmes, lorsque l'on considère l'action de m' sur m, et celle de m sur m'. Déterminons ces valeurs.

On a par le n°. 22 du second livre, en ne portant la précision que jusqu'aux troisièmes puissances des excentricités inclusivement,

$$\frac{r}{a}=1+\tfrac{1}{2}e^2-(e-\tfrac{3}{8}e^3).\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)-\tfrac{1}{2}e^2.\cos.(2nt+2\varepsilon-2\varpi)$$
$$-\tfrac{3}{8}e^3.\cos.(3nt+3\varepsilon-3\varpi);$$
$$v=nt+\varepsilon+(2e-\tfrac{1}{4}e^3).\sin.(nt+\varepsilon-\varpi)+\tfrac{5}{4}e^2.\sin.(2nt+2\varepsilon-2\varpi)$$
$$+\tfrac{13}{12}e^3.\sin.(3nt+3\varepsilon-3\varpi).$$

Cela posé; si l'on développe R suivant les termes dépendans de l'angle $5n't-2nt$; on aura une expression de cette forme,

$$\begin{aligned}R=\;&M^{(0)}.e'^3.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-3\varpi')\\&+M^{(1)}.e'^2e.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi'-\varpi)\\&+M^{(2)}.e'e^2.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi'-2\varpi)\\&+M^{(3)}.e^3.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-3\varpi)\\&+M^{(4)}.e'\gamma^2.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi'-2\Pi)\\&+M^{(5)}.e\gamma^2.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi-2\Pi);\end{aligned}$$

et l'on trouvera après toutes les réductions,

$$a'M^{(0)}=-\frac{m'}{48}.\left\{389.b_{\frac{1}{2}}^{(2)}+201.\alpha.\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha}+27.\alpha^2.\frac{ddb_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2}+\alpha^3.\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3}\right\};$$
$$a'M^{(1)}=\frac{m'}{16}.\left\{402.b_{\frac{1}{2}}^{(3)}+193.\alpha.\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha}+26.\alpha^2.\frac{ddb_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2}+\alpha^3.\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3}\right\};$$
$$a'M^{(2)}=-\frac{m'}{16}.\left\{396.b_{\frac{1}{2}}^{(4)}+184.\alpha.\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha}+25.\alpha^2.\frac{ddb_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2}+\alpha^3.\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3}\right\};$$
$$a'M^{(3)}=\frac{m'}{48}.\left\{380.b_{\frac{1}{2}}^{(5)}+174.\alpha.\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha}+24.\alpha^2.\frac{ddb_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^2}+\alpha^3.\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^3}\right\};$$
$$a\,M^{(4)}=-\frac{m'\alpha}{16}.\left\{10.b_{\frac{3}{2}}^{(3)}+\alpha.\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha}\right\};$$
$$a'M^{(5)}=\frac{m'\alpha}{16}.\left\{7.b_{\frac{3}{2}}^{(4)}+\alpha.\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha}\right\}.$$

de là, on tire

$$\begin{aligned}m'.a'P=\;&a'M^{(0)}.e'^3.\sin.3\varpi'+a'M^{(1)}.e'^2e.\sin.(2\varpi'+\varpi)\\&+a'M^{(2)}.e'e^2.\sin.(\varpi'+2\varpi)+a\,M^{(3)}.e^3.\sin.3\varpi\\&+a'M^{(4)}.e'\gamma^2.\sin.(2\Pi+\varpi')+a'M^{(5)}.e\gamma^2.\sin.(2\Pi+\varpi).\end{aligned}$$

On aura $m'.a'P'$, en changeant dans cette expression de $m'.a'P$, les sinus en cosinus, et il sera facile de conclure les valeurs de aP

et de aP', en multipliant celles de $a'P$ et de $a'P'$, par $\frac{a}{a'}$ ou par α. On aura ensuite, en faisant $i=5$, dans les expressions de δv et de $\frac{\delta r}{a}$ du n°. précédent,

$$\delta v = -\frac{6m'.n^2}{(5n'-2n)^2}.\left\{\begin{array}{l}\left\{aP'+\frac{2a.dP}{(5n'-2n).dt}-\frac{3a.ddP'}{(5n'-2n)^2.dt^2}\right\}.\sin.(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)\\ -\left\{aP-\frac{2a.dP'}{(5n'-2n).dt}-\frac{3a.ddP}{(5n'-2n)^2.dt^2}\right\}.\cos.(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)\end{array}\right\}$$

$$-\frac{2m'.n}{5n'-2n}.\left\{\begin{array}{l}a^2.\left(\frac{dP}{da}\right).\cos.(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)\\ -a^2.\left(\frac{dP'}{da}\right).\sin.(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)\end{array}\right\}$$

$$-\frac{eH}{2}.\sin.(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon-\varpi+A)$$

$$+\tfrac{5}{4}eK.\sin.(5n't-4nt+5\epsilon'-4\epsilon+\varpi+B);$$

$$\frac{\delta r}{a}=H.\cos.(5n't-3nt+5\epsilon'-3\epsilon+A)-eH.\cos.(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon-\varpi+A)$$

$$+eH.\cos.(5n't-4nt+5\epsilon'-4\epsilon+\varpi+A)$$

$$+\frac{4m'.n}{5n'-2n}.\left\{\begin{array}{l}aP.\sin.(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)\\ +aP'.\cos.(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)\end{array}\right\}.$$

En supposant $i=-2$, et changeant ce qui est relatif à m, dans ce qui est relatif à m', et réciproquement; on aura

$$\delta v'=\frac{15.m.n'^2}{(5n'-2n)^2}.\left\{\begin{array}{l}\left\{a'P'+\frac{2a'.dP}{(5n'-2n).dt}-\frac{3a'.ddP'}{(5n'-2n)^2.dt^2}\right\}.\sin.(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)\\ -\left\{a'P-\frac{2a'.dP'}{(5n'-2n).dt}-\frac{3a'.ddP}{(5n'-2n)^2.dt^2}\right\}.\cos.(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)\end{array}\right\}$$

$$-\frac{2m.n'}{5n'-2n}.\left\{\begin{array}{l}a'^2.\left(\frac{dP}{da'}\right).\cos.(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)\\ -a'^2.\left(\frac{dP'}{da'}\right).\sin.(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)\end{array}\right\}$$

$$-\frac{e'H'}{2}.\sin.(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon-\varpi'+A')$$

$$+\tfrac{5}{4}.e'K'.\sin.(3n't-2nt+3\epsilon'-2\epsilon+\varpi'+B');$$

$$\frac{\delta r'}{a'}=H'.\cos.(4n't-2nt+4\epsilon'-2\epsilon+A')-e'H'.\cos.(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon-\varpi'+A')$$

$$+e'H'.\cos.(3n't-2nt+3\epsilon'-2\epsilon+\varpi'+A')$$

$$-\frac{10.mn'}{5n'-2n}.\left\{\begin{array}{l}a'P.\sin.(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)\\ +a'P'.\cos.(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)\end{array}\right\};$$

$H'.\cos.(4n't-2nt+4\varepsilon'-2\varepsilon+A')$ étant la partie de $\frac{r'\delta r'}{a'^2}$ dépendante de l'angle $4n't-2nt$, et $K'.\sin.(4n't-2nt+4\varepsilon'-2\varepsilon+B')$ étant la partie de $\delta v'$, relative au même angle. Dans ces diverses inégalités, nous rapportons pour plus de simplicité, l'origine des angles, à l'intersection commune des deux orbites de Jupiter et de Saturne, comme nous l'avons fait dans le développement de l'expression de R du n°. 4, et comme nous le ferons dans le n°. suivant. Nous ne conserverons ainsi que pour l'analogie, l'angle Π qu'il faut alors supposer nul.

On déterminera de la manière suivante, les différences $\frac{dP}{dt}$, $\frac{ddP}{dt^2}$, $\frac{dP'}{dt}$, $\frac{ddP'}{dt^2}$. On calculera pour l'époque de 1750, et pour une époque plus éloignée de deux cents années juliennes, c'est-à-dire pour 1950, les valeurs de $\frac{de}{dt}$, $\frac{d\varpi}{dt}$, $\frac{de'}{dt}$, $\frac{d\varpi'}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$, $\frac{d\Pi}{dt}$. Soient $\frac{de_{,}}{dt}$, $\frac{d\varpi_{,}}{dt}$, $\frac{de'_{,}}{dt}$, &c. ces valeurs pour la seconde de ces époques; on aura, en supposant que t exprime un nombre d'années juliennes,

$$\frac{de_{,}}{dt}=\frac{de}{dt}+200.\frac{dde}{dt^2};$$

les différences de et dde dans le second membre de cette équation, étant relatives à 1750. L'expression de e, pour un temps quelconque t, est, en négligeant le cube de t, et ses puissances supérieures,

$$e+t.\frac{de}{dt}+\frac{t^2}{2}.\frac{dde}{dt^2};$$

e, $\frac{de}{dt}$, $\frac{dde}{dt^2}$, se rapportant à l'époque de 1750. Cette expression peut s'étendre à mille ou douze cents ans avant et après cette époque. On aura de la même manière, les expressions de ϖ, e', ϖ', γ et Π. On calculera par leur moyen, les valeurs de P, correspondantes aux trois époques de 1750, 2250 et 2750. Soient P, $P_{,}$, $P_{,,}$ ces valeurs; l'expression générale de P étant

$$P+t.\frac{dP}{dt}+\frac{t^2}{2}.\frac{ddP}{dt^2};$$

on aura en faisant successivement $t=500$, $t=1000$,

$$P+500\,.\frac{dP}{dt}+250000\,.\tfrac{1}{2}.\frac{ddP}{dt^2}=P_{,};$$

$$P+1000.\frac{dP}{dt}+1000000.\tfrac{1}{2}.\frac{ddP}{dt^2}=P_{,,};$$

ce qui donne

$$\frac{dP}{dt}=\frac{4P_{,}-3P-P_{,,}}{1000};\quad \frac{ddP}{dt^2}=\frac{P_{,,}-2P_{,}+P}{250000}.$$

9. Les termes dépendans des cinquièmes puissances des excentricités peuvent avoir une influence sensible sur les deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne; mais le calcul en est pénible par son excessive longueur. Son importance a déterminé Burckhardt, très-habile astronome, à l'entreprendre. Il a discuté avec une scrupuleuse attention, tous les termes de cet ordre qui dépendent de l'angle $5n't-2nt$, en se permettant seulement de négliger les produits des excentricités, par la quatrième puissance de l'inclinaison mutuelle des orbites; ce qui ne peut, en effet, produire que des quantités insensibles. L'expression de R du n°. 4 est relative à l'action de m' sur m : la partie de cette expression, qui a le plus d'influence sur cette inégalité, est le produit de m' par le facteur

$$-\frac{1}{\sqrt{r^2-2rr'.\cos.(v'-v)+r'^2}}.+\frac{\frac{\gamma^2}{4}.rr'.\{\cos.(v'-v)-\cos.(v'+v)\}}{\{r^2-2rr'.\cos.(v'-v)+r'^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Ce facteur est le même pour les deux planètes; en le développant, et en ne considérant que les produits des excentricités et des inclinaisons, relatifs à l'angle $5n't-2nt$, on a une fonction de cette forme,

$$\left.\begin{array}{l}
N^{(0)}.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-4\varpi'+\varpi)\\
+N^{(1)}.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-3\varpi')\\
+N^{(2)}.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi'-\varpi)\\
+N^{(3)}.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi'-2\varpi)\\
+N^{(4)}.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-3\varpi)\\
+N^{(5)}.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon+\varpi'-4\varpi)\\
+N^{(6)}.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi'+\varpi-2\Pi)\\
+N^{(7)}.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi'-2\Pi)\\
+N^{(8)}.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi-2\Pi)\\
+N^{(9)}\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon+\varpi'-2\varpi-2\Pi)
\end{array}\right\};\ (O)$$

et l'on trouve

$$a'N^{(0)} = \frac{e'^4.e}{768}.\left\{\begin{array}{l} 3138.b_{\frac{1}{2}}^{(1)} - 13\alpha.\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} - 1556.\alpha^2.\frac{ddb_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} - 438.\alpha^3.\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} \\ -38.\alpha^4.\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^4} - \alpha^5.\frac{d^5b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^5} \end{array}\right\};$$

$$a'N^{(1)} = \frac{e'^3}{768}.\left\{\begin{array}{l} -(20267.e'^2+24896.e^2).b_{\frac{1}{2}}^{(2)} - (7223.e'^2+8144.e^2).\alpha.\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} \\ +(1094.e'^2+3692.e^2).\alpha^2.\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} + (482.e'^2+1436.e^2).\alpha^3.\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} \\ +(41.e'^2+140.e^2).\alpha^4.\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^4} + (e'^2+4e^2).\alpha^5.\frac{d^5b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^5} \end{array}\right\}$$

$$-\frac{e'^3.\gamma^2}{384}.\left\{\begin{array}{l} 590.\alpha.\left(b_{\frac{3}{2}}^{(1)}+b_{\frac{3}{2}}^{(3)}\right) + 255.\alpha^2.\left(\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{d\alpha} + \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha}\right) \\ +30.\alpha^3.\left(\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} + \frac{d^2.b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2}\right) + \alpha^4.\left(\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} + \frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3}\right) \end{array}\right\};$$

$$a'N^{(2)} = -\frac{e'^2e}{768}.\left\{\begin{array}{l} -(109392.e'^2+53064.e^2).b_{\frac{1}{2}}^{(3)} - (42368.e'^2+23436.e^2).\alpha.\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} \\ +(1064.e'^2+2088.e^2).\alpha^2.\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} + (1572.e'^2+1710.e^2).\alpha^3.\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} \\ +(152.e'^2+192.e^2).\alpha^4.\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^4} + (4e'^2+6e^2).\alpha^5.\frac{d^5b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^5} \end{array}\right\}$$

$$+\frac{e'^2.e\gamma^2}{128}.\left\{\begin{array}{l} 595.\alpha.\left(b_{\frac{3}{2}}^{(2)}+b_{\frac{3}{2}}^{(4)}\right) + 245.\alpha^2.\left(\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha} + \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha}\right) \\ +29.\alpha^3.\left(\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} + \frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2}\right) + \alpha^4.\left(\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} + \frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3}\right) \end{array}\right\};$$

$$a'N^{(3)} = \frac{e'.e^2}{768}.\left\{\begin{array}{l} -(42912.e^2+199848.e'^2).b_{\frac{1}{2}}^{(4)} - (21728.e^2+82032.e'^2).\alpha.\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} \\ -(640.e^2+2970.e'^2).\alpha^2.\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} + (864.e^2+1854.e'^2).\alpha^3.\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3} \\ +(116.e^2+210.e'^2).\alpha^4.\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^4} + (4e^2+6e'^2).\alpha^5.\frac{d^5b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^5} \end{array}\right\}.$$

$$-\frac{e'e^2.\gamma^2}{128}.\left\{\begin{array}{l} 580.\alpha.\left(b_{\frac{3}{2}}^{(3)}+b_{\frac{3}{2}}^{(5)}\right)+234.\alpha^2.\left(\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha}+\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{d\alpha}\right) \\ +28.\alpha^3.\left(\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2}+\frac{d^2.b_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{d\alpha^2}\right)+\alpha^4.\left(\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3}+\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{d\alpha^3}\right) \end{array}\right\};$$

$$a'N^{(4)}=-\frac{e^3}{768}.\left\{\begin{array}{l} -(11840.e^2+152000.e'^2).b_{\frac{1}{2}}^{(5)}-(6560.e^2+65168.e'^2).\alpha.\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha} \\ -(592.e^2+4720.e'^2).\alpha^2.\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^2}+(152.e^2+920.e'^2).\alpha^3.\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^3} \\ +(26.e^2+128.e'^2).\alpha^4.\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^4}+(e^2+4e'^2).\alpha^5.\frac{d^5b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^5} \end{array}\right\}$$

$$+\frac{e^3.\gamma^2}{384}.\left\{\begin{array}{l} 554.\alpha.\left(b_{\frac{3}{2}}^{(4)}+b_{\frac{3}{2}}^{(6)}\right)+222.\alpha^2.\left(\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha}+\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{d\alpha}\right) \\ +27.\alpha^3.\left(\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2}+\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{d\alpha^2}\right)+\alpha^4.\left(\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3}+\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{d\alpha^3}\right) \end{array}\right\};$$

$$a'N^{(5)}=-\frac{e'.e^4}{768}.\left\{\begin{array}{l} 41448.b_{\frac{1}{2}}^{(6)}+18392.\alpha.\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha}+1780.\alpha^2.\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^2} \\ -156.\alpha^3.\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^3}-29.\alpha^4.\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^4}-\alpha^5.\frac{d^5b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^5} \end{array}\right\};$$

$$a'N^{(6)}=-\frac{e'^2.e\gamma^2}{128}.\left\{-85.\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(2)}+85.\alpha^2.\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha}+21.\alpha^3.\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2}+\alpha^4.\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3}\right\};$$

$$a'N^{(7)}=-\frac{e'\gamma^2}{128}.\left\{\begin{array}{l} (56.e^2+842.e'^2).\alpha.b_{\frac{3}{2}}^{(3)}+(4e^2+87.e'^2).\alpha^2.\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha} \\ -(16e^2+2e'^2).\alpha^3.\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2}-(2e^2+e'^2).\alpha^4.\frac{d^3.b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} \end{array}\right\};$$

$$a'N^{(8)}=-\frac{e\gamma^2}{128}.\left\{\begin{array}{l} -(174.e^2+196.e'^2).\alpha.b_{\frac{3}{2}}^{(4)}-(50.e^2+180.e'^2).\alpha^2.\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha} \\ +(14e'^2-e^2).\alpha^3.\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2}+(2e'^2+e^2).\alpha^4.\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3} \end{array}\right\};$$

$$a'N^{(9)}=-\frac{e'e^2\gamma^2}{128}.\left\{580.\alpha.b_{\frac{3}{2}}^{(5)}+86.\alpha^2.\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{d\alpha}-8\alpha^3.\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{d\alpha^2}-\alpha^4.\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{d\alpha^3}\right\}.$$

Lorsque l'on considère l'action de m' sur m, il faut par le n°. 4 augmenter dans $a'N^{(0)}$, $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$, de $-\frac{a}{a'}$, ou de $-\alpha$, ce qui augmente $a'N^{(0)}$, de $-\frac{3125.\alpha.e'^4e}{768}$. Lorsque l'on considère l'action de m sur m', il faut augmenter $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$ de $-\frac{1}{\alpha^2}$; ce qui augmente $a'N^{(0)}$ de $-\frac{500.e'^4e}{768.\alpha^2}$. Cela posé, on multipliera les valeurs précédentes de $a'N^{(0)}$, $a'N^{(1)}$, &c. par m', et l'on décomposera chacun des cosinus qu'elles multiplient dans la fonction (O), en sinus et cosinus de $5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon$; ce qui donne à cette fonction la forme suivante,

$$m'.a'P_{,}\ .\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)$$
$$+m'.a'P_{,}'.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon).$$

On multipliera pareillement par m, les valeurs de $a'N^{(0)}$, $a'N^{(1)}$, &c.; relatives à l'action de m sur m'; et l'on décomposera les sinus et cosinus de la fonction (O), en sinus et cosinus de $5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon$; ce qui lui donnera la forme suivante,

$$m.a'P_{,,}\ .\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)$$
$$+m.a'P_{,,}'.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon).$$

On substituera donc successivement ces valeurs, dans les expressions de δv et de $\delta v'$ du n°. précédent, et l'on pourra négliger leurs différences secondes, à cause de la petitesse de ces quantités. On aura ainsi, les parties des inégalités de Jupiter et de Saturne, relatives à l'angle $5n't-2nt$, et dépendantes des cinquièmes puissances des excentricités et des inclinaisons des orbites.

On peut observer ici, qu'en vertu du rapport qui existe entre les moyens mouvemens de Jupiter et de Saturne, on a $3125.\alpha^3=500$. En effet, $\alpha^3=\frac{n'^2}{n^2}$; et de plus, $5n'$ est à fort peu près égal à $2n$; ce qui donne $\frac{n'^2}{n^2}=\frac{4}{25}$. De là il suit que la valeur de $a'N^{(0)}$ est la même, soit que l'on considère l'action de m' sur m, soit que l'on considère l'action de m sur m'. Ainsi, l'on peut conclure la partie précédente de $\delta v'$, de la partie correspondante de δv, en multipliant celle-ci par $-\frac{5m.n'^2}{2m'.n^2}$.

10. Dans la théorie de Mercure troublé par la terre, il faut considérer l'inégalité dépendante de l'angle $nt-4n't$; parce que le moyen mouvement de Mercure est à très-peu-près quadruple de celui de la terre. En supposant que m soit Mercure, et m' la terre; on aura l'inégalité dont il s'agit, en faisant $i=4$, dans l'expression de δv du n°. 7. Vu l'extrême petitesse de cette inégalité, on peut négliger les termes qui n'ont point $(n-4n')^2$ pour diviseur, et ceux qui dépendent de $\frac{dP}{dt}$ et $\frac{dP'}{dt}$. On aura ainsi,

$$\delta v = \frac{3m'.n^2}{(n-4n')^2}.\left\{\begin{array}{l} aP'.\sin.(nt-4n't+\varepsilon-4\varepsilon') \\ +aP.\cos.(nt-4n't+\varepsilon-4\varepsilon') \end{array}\right\}.$$

On déterminera facilement P et P', de cette manière. On calculera par la formule (A) du n°. 1, la valeur de $\frac{r\delta r}{a^2}$, correspondante à l'angle $4n't-2nt$, ce qui revient à faire $i=4$, dans cette formule. On aura ainsi une valeur de $\frac{r\delta r}{a^2}$, de cette forme,

$$\begin{array}{l} L.e^2\ .\cos.(4n't-2nt+4\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi) \\ +L^{(1)}.ee'.\cos.(4n't-2nt+4\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi-\varpi') \\ +L^{(2)}.e'^2.\cos.(4n't-2nt+4\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi') \\ +L^{(3)}.\gamma^2\ .\cos.(4n't-2nt+4\varepsilon'-2\varepsilon-2\Pi). \end{array}$$

On observera ensuite que cette valeur de $\frac{r\delta r}{a^2}$ résulte des variations de l'excentricité et du périhélie, dépendantes de $nt-4n't$ dans l'expression elliptique de $\frac{1}{2}.\frac{r^2}{a^2}$: cette expression contient le terme $-e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)$, dont la variation est

$$-\delta e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)-e\delta\varpi.\sin.(nt+\varepsilon-\varpi);$$

δe et $\delta\varpi$ étant les variations de e et de ϖ, dépendantes de $nt-4n't$. On a par le n°. 69 du second livre,

$$\delta e = \frac{m'.an}{n-4n'}.\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{dP}{de}\right).\sin.(4n't-nt+4\varepsilon'-\varepsilon) \\ +\left(\frac{dP'}{de}\right).\cos.(4n't-nt+4\varepsilon'-\varepsilon) \end{array}\right\};$$

$$e\delta\varpi = -\frac{m'.an}{n-4n'}.\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{dP}{de}\right).\cos.(4n't-nt+4\varepsilon'-\varepsilon) \\ -\left(\frac{dP'}{de}\right).\sin.(4n't-nt+4\varepsilon'-\varepsilon) \end{array}\right\}.$$

La variation de $-e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)$ devient ainsi,

$$\frac{m'.an}{n-4n'}.\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{dP}{de}\right).\sin.(2nt-4n't+2\varepsilon-4\varepsilon'-\varpi)\\ -\left(\frac{dP'}{de}\right).\cos.(2nt-4n't+2\varepsilon-4\varepsilon'-\varpi)\end{array}\right\}.$$

Cette fonction est identique avec l'expression précédente de $\frac{r\delta r}{a^2}$; en changeant donc dans l'une et dans l'autre, $2nt+2\varepsilon$, dans $nt+\varepsilon+\varpi+\frac{\pi}{2}$, π étant la demi-circonférence; on aura

$$\begin{aligned}\frac{m'.an}{n-4n'}.\left\{\left(\frac{dP}{de}\right).\cos.(nt-4n't+\varepsilon-4\varepsilon')+\left(\frac{dP'}{de}\right).\sin.(nt-4n't+\varepsilon-4\varepsilon')\right\}\\ = L.e^2.\sin.(4n't-nt+4\varepsilon'-\varepsilon-3\varpi)\\ +L^{(1)}.ee'.\sin.(4n't-nt+4\varepsilon'-\varepsilon-\varpi'-2\varpi)\\ +L^{(2)}.e'^2.\sin.(4n't-nt+4\varepsilon'-\varepsilon-2\varpi'-\varpi)\\ +L^{(3)}.\gamma^2.\sin.(4n't-nt+4\varepsilon'-\varepsilon-\varpi-2\Pi).\end{aligned}$$

Si l'on intègre cette équation par rapport à e, et qu'ensuite on la multiplie par $\frac{3n}{n-4n'}$, on aura

$$\delta v=\frac{3n}{n-4n'}.\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{3}L.e^3.\sin.(4n't-nt+4\varepsilon'-\varepsilon-3\varpi)\\ +\frac{1}{2}L^{(1)}.e^2e'.\sin.(4n't-nt+4\varepsilon'-\varepsilon-\varpi'-2\varpi)\\ +L^{(2)}.ee'^2.\sin.(4n't-nt+4\varepsilon'-\varepsilon-2\varpi'-\varpi)\\ +L^{(3)}.e\gamma^2.\sin.(4n't-nt+4\varepsilon'-\varepsilon-\varpi-2\Pi)\end{array}\right\}.$$

Dans cette intégration, on néglige les termes de P et de P' dépendans de e'^3 et de $e'\gamma^2$; mais l'excentricité de l'orbite de la terre est si peu considérable relativement à celle de Mercure, et l'inégalité dont il s'agit est si petite, que l'on peut les omettre sans erreur sensible.

11. Il résulte du n°. 71 du second livre, que les termes

$$\begin{aligned}M^{(4)}.e'\gamma^2.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\Pi-\varpi')\\ +M^{(5)}.e\gamma^2.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\Pi-\varpi),\end{aligned}$$

du développement de R, donné dans le n°. 8, produisent dans la valeur de s, ou dans le mouvement de m en latitude, l'inégalité,

$$-\frac{2an}{5n'-2n}.\left\{\begin{array}{l}e'\gamma.M^{(4)}\sin.(5n't-3nt+5\varepsilon'-3\varepsilon-\Pi-\varpi')\\ +e\gamma.M^{(5)}.\sin.(5n't-3nt+5\varepsilon'-3\varepsilon-\Pi-\varpi)\end{array}\right\}.$$

Pareillement, les mêmes termes produisent dans la valeur de s', ou dans le mouvement de m' en latitude, l'inégalité

$$\frac{2a'n'}{5n'-2n}\cdot\frac{m}{m'}\cdot\left\{\begin{array}{l} e'\gamma.M^{(4)}.\sin.(4n't-2nt+4\varepsilon'-2\varepsilon-\Pi-\varpi') \\ +e\gamma.M^{(5)}.\sin.(4n't-2nt+4\varepsilon'-2\varepsilon-\Pi-\varpi) \end{array}\right\};$$

Π étant comme dans l'inégalité précédente de s, la longitude du nœud ascendant de l'orbite de m' sur celle de m. Ce sont les seules inégalités sensibles en latitude, du système planétaire, dépendantes du produit des excentricités et des inclinaisons des orbites.

On a vu dans le n°. 6, que la valeur de δs introduit dans le mouvement de m, réduit au plan fixe, le terme $-\text{tang}.\varphi.\delta s.\cos.(v_1-\theta)$: en substituant dans ce terme, l'inégalité précédente de s ; on aura un terme dépendant de $5n't-2nt$, qui doit s'ajouter à la grande inégalité du mouvement de m ; mais ce terme est insensible pour Jupiter et Saturne.

CHAPITRE

CHAPITRE II.

Des inégalités dépendantes du carré de la force perturbatrice.

12. Les grandes inégalités que nous venons de déterminer, en produisent de sensibles, dépendantes du carré de la force perturbatrice : nous en avons donné les expressions analytiques dans les nos. 65 et 69 du second livre. Il résulte du no. 65 du même livre, que si l'on désigne par $\overline{H}.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon+\overline{A})$, la grande inégalité de Jupiter; on aura

$$-\frac{\overline{H}^2}{8}.\frac{(2m'.\sqrt{a'}+5m.\sqrt{a})}{m'\sqrt{a'}}.\sin.2(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon+\overline{A}),$$

pour l'inégalité correspondante de Jupiter, dépendante du carré de la force perturbatrice : cette inégalité s'ajoute, comme celle dont elle dérive, au moyen mouvement de la planète.

Pareillement, si l'on désigne par $-\overline{H}'.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon+\overline{A}')$, la grande inégalité de Saturne; on aura

$$\frac{\overline{H}'^2}{8}.\frac{(2m'.\sqrt{a'}+5m.\sqrt{a})}{m.\sqrt{a}}.\sin.2(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon+\overline{A}'),$$

pour l'inégalité correspondante de Saturne, et qui doit être ajoutée au moyen mouvement de cette planète.

Les variations des excentricités et des périhélies peuvent introduire de semblables inégalités dans les moyens mouvemens des deux planètes. Pour les déterminer, nous observerons que l'on a, en n'ayant égard qu'aux cubes et aux produits de trois dimensions, des excentricités et des inclinaisons des orbites,

$$3a.\int\int ndt.\mathrm{d}R=-6am'.\int\int n^2dt^2.\begin{cases} P.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon) \\ -P'.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\end{cases};$$

ce qui donne dans $3a.\int\int ndt.\mathrm{d}R$, la quantité

$$-6am'.\int\int n^2dt^2.\left\{\begin{array}{l}\delta e.\left\{\left(\frac{dP}{de}\right).\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)-\left(\frac{dP'}{de}\right).\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\right. \\ +\delta\varpi.\left\{\left(\frac{dP}{d\varpi}\right).\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)-\left(\frac{dP'}{d\varpi}\right).\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\right. \\ +\delta e'.\left\{\left(\frac{dP}{de'}\right).\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)-\left(\frac{dP'}{de'}\right).\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\right. \\ +\delta\varpi'.\left\{\left(\frac{dP}{d\varpi'}\right).\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)-\left(\frac{dP'}{d\varpi'}\right).\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\right. \\ +\delta\gamma.\left\{\left(\frac{dP}{d\gamma}\right).\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)-\left(\frac{dP'}{d\gamma}\right).\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\right. \\ +\delta\Pi.\left\{\left(\frac{dP}{d\Pi}\right).\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)-\left(\frac{dP'}{d\Pi}\right).\sin.(5'nt-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\right.\end{array}\right.$$

δe, $\delta\varpi$, $\delta e'$, $\delta\varpi'$, $\delta\gamma$, $\delta\Pi$ étant les parties de e, ϖ, e', ϖ', γ, Π, qui dépendent de l'angle $5n't-2nt$. On a par le n°. 8,

$$\left(\frac{dP}{d\varpi}\right)=e.\left(\frac{dP'}{de}\right);\quad \left(\frac{dP'}{d\varpi}\right)=-e.\left(\frac{dP}{de}\right);$$
$$\left(\frac{dP}{d\varpi'}\right)=e'.\left(\frac{dP'}{de'}\right);\quad \left(\frac{dP'}{d\varpi'}\right)=-e'.\left(\frac{dP}{de'}\right);$$
$$\left(\frac{dP}{d\Pi}\right)=\gamma.\left(\frac{dP'}{d\gamma}\right);\quad \left(\frac{dP'}{d\Pi}\right)=-\gamma.\left(\frac{dP}{d\gamma}\right).$$

De plus, on a par le n°. 69 du second livre,

$$\left(\frac{dP}{de}\right).\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)-\left(\frac{dP'}{de}\right).\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)=\frac{(5n'-2n)}{m'an}.$$
$$\left(\frac{dP}{de}\right).\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)+\left(\frac{dP'}{de}\right).\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)=-\frac{(5n'-2n)}{m'an}.$$

on a pareillement

$$\left(\frac{dP}{de'}\right).\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)-\left(\frac{dP'}{de'}\right).\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)=\frac{(5n'-2n)}{ma'n'}.$$
$$\left(\frac{dP}{de'}\right).\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)+\left(\frac{dP'}{de'}\right).\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)=-\frac{(5n'-2n)}{ma'n'}.$$

Pour avoir les valeurs de $\delta\gamma$ et de $\delta\Pi$, nous observerons que la latitude s de m au-dessus de l'orbite primitive de m', est $-\gamma.\sin.(v-\Pi)$; ce qui donne

$$-\delta s=\delta\gamma.\sin.(v-\Pi)-\gamma.\delta\Pi.\cos.(v-\Pi);$$

or on a par le n°. 71 du second livre,

$$\delta s = \frac{m'an}{5n'-2n} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{dP}{d\gamma}\right) . \cos . (5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - v + \Pi) \\ - \left(\frac{dP'}{d\gamma}\right) . \sin . (5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - v + \Pi) \end{array} \right\}.$$

En comparant cette expression, à la précédente; on aura

$$\delta\gamma = -\frac{m'an}{5n'-2n} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{dP}{d\gamma}\right) . \sin . (5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ + \left(\frac{dP'}{d\gamma}\right) . \cos . (5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \end{array} \right\};$$

$$\gamma\delta\Pi = \frac{m'an}{5n'-2n} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{dP}{d\gamma}\right) . \cos . (5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ - \left(\frac{dP'}{d\gamma}\right) . \sin . (5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \end{array} \right\};$$

γ exprimant l'inclinaison respective des deux orbites l'une sur l'autre, et Π étant la longitude du nœud ascendant de l'orbite de m' sur celle de m. Ces quantités varient encore par l'action de m sur m': en nommant $\delta_{,}\gamma$ et $\delta_{,}\Pi$ ces dernières variations, et représentant par $\delta_{,,}\gamma$ et $\delta_{,,}\Pi$, les variations précédentes dues à l'action de m' sur m; on aura

$$\delta\gamma = \delta_{,}\gamma + \delta_{,,}\gamma \; ; \qquad \delta\Pi = \delta_{,}\Pi + \delta_{,,}\Pi ;$$

$$\delta_{,}\gamma = \frac{ma'n'}{m'an} . \delta_{,,}\gamma \; ; \qquad \delta_{,}\Pi = \frac{ma'n'}{m'an} . \delta_{,,}\Pi.$$

Cela posé, si l'on substitue ces diverses quantités dans la fonction (X); on trouve qu'elle se réduit à zéro. Les variations des excentricités, des périhélies, des nœuds et des inclinaisons des orbites, correspondantes aux deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, n'introduisent donc dans le moyen mouvement de Jupiter, et dans le grand axe de son orbite considérée comme une ellipse variable, aucune inégalité sensible dépendante du carré de la force perturbatrice; et il est visible que cela a encore lieu, pour le moyen mouvement de Saturne, et pour le grand axe de son orbite.

13. Considérons présentement les variations des excentricités et des périhélies. Nous avons donné dans le n°. 69 du second livre, les expressions des accroissemens de $\frac{de}{dt}$, $\frac{d\varpi}{dt}$, $\frac{de'}{dt}$, $\frac{d\varpi'}{dt}$, dus aux deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne; et nous avons observé dans le même n°. que les variations de e, ϖ, e', ϖ', relatives à l'angle $5n't - 2nt$, introduisent dans ces expressions, des variations sem-

blables à celles qu'y produisent les deux grandes inégalités. En appliquant ces considérations à Jupiter et à Saturne, et désignant par δe, et $\delta\varpi$, les variations dues au carré de la force perturbatrice; on trouve

$$\delta e = -\frac{3m'^2.a^2n^3}{(5n'-2n)^2}.\frac{\{5m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'}\}}{m'\sqrt{a'}}.\left\{\begin{array}{l} \left\{P.\left(\frac{dP'}{de}\right)-P'.\left(\frac{dP}{de}\right)\right\}.t \\ +\frac{\left\{P.\left(\frac{dP'}{de}\right)+P'.\left(\frac{dP}{de}\right)\right\}}{2.(5n'-2n)}.\sin.2.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon) \\ +\frac{\left\{P'.\left(\frac{dP'}{de}\right)-P.\left(\frac{dP}{de}\right)\right\}}{2.(5n'-2n)}.\cos.2.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon) \end{array}\right\}$$

$$+\frac{m'^2.a^2n^2}{5n'-2n}.\left\{\begin{array}{l} \left\{\left(\frac{dP'}{de}\right).\left(\frac{ddP}{de^2}\right)-\left(\frac{dP}{de}\right).\left(\frac{ddP'}{de^2}\right)+\left(\frac{dP'}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP}{de\,d\gamma}\right)-\left(\frac{dP}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP'}{de\,d\gamma}\right)\right\}.t \\ +\frac{\left\{\left(\frac{dP}{de}\right)^2-\left(\frac{dP'}{de}\right)^2\right\}}{4e.(5n'-2n)}.\cos.2.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon) \\ -\frac{\left(\frac{dP}{de}\right).\left(\frac{dP'}{de}\right)}{2e.(5n'-2n)}.\sin.2.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon) \end{array}\right\}$$

$$+\frac{mm'.aa'.nn't}{5n'-2n}.\left\{\left(\frac{dP'}{de'}\right).\left(\frac{ddP}{de\,de'}\right)-\left(\frac{dP}{de'}\right).\left(\frac{ddP'}{de\,de'}\right)+\left(\frac{dP'}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP}{de\,d\gamma}\right)-\left(\frac{dP}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP'}{de\,d\gamma}\right)\right\};$$

$$\delta\varpi = \frac{3m'^2.a^2n^3}{(5n'-2n)^2.e}.\frac{\{5m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'}\}}{m'\sqrt{a'}}.\left\{\begin{array}{l} \left\{P.\left(\frac{dP}{de}\right)+P'.\left(\frac{dP'}{de}\right)\right\}.t \\ +\frac{\left\{P.\left(\frac{dP}{de}\right)-P'.\left(\frac{dP'}{de}\right)\right\}}{2.(5n'-2n)}.\sin.2.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon) \\ +\frac{\left\{P'.\left(\frac{dP}{de}\right)+P.\left(\frac{dP'}{de}\right)\right\}}{2.(5n'-2n)}.\cos.2.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon) \end{array}\right\}$$

$$+\frac{m'^2.a^2n^2}{(5n'-2n).e}.\left\{\begin{array}{l} \left\{\left(\frac{dP}{de}\right).\left(\frac{ddP}{de^2}\right)+\left(\frac{dP'}{de}\right).\left(\frac{ddP'}{de^2}\right)+\left(\frac{dP}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP}{de\,d\gamma}\right)+\left(\frac{dP'}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP'}{de\,d\gamma}\right)\right\}.t \\ +\frac{\left\{\left(\frac{dP}{de}\right)^2-\left(\frac{dP'}{de}\right)^2\right\}}{2.e.(5n'-2n)}.\sin.2.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon) \\ +\frac{\left(\frac{dP}{de}\right).\left(\frac{dP'}{de}\right)}{e.(5n'-2n)}.\cos.2.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon) \end{array}\right\}$$

$$+\frac{mm'.aa'.nn'.t}{(5n'-2n).e}.\left\{\left(\frac{dP}{de'}\right).\left(\frac{ddP}{de\,de'}\right)+\left(\frac{dP'}{de'}\right).\left(\frac{ddP'}{de\,de'}\right)+\left(\frac{dP}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP}{de\,d\gamma}\right)+\left(\frac{dP'}{d\gamma}\right)\left(\frac{ddP'}{de\,d\gamma}\right)\right\}.$$

Les parties de ces expressions, proportionnelles au tems t, donnent les variations séculaires de l'excentricité et du périhélie, dues au carré de la force perturbatrice. Pour avoir les termes périodiques dépendans de ce carré; considérons le terme $2e.\sin.(nt+\varepsilon-\varpi)$, de l'expression elliptique de la longitude vraie. Si l'on désigne par δe, et par $\delta\varpi$, les variations de e et de ϖ dépendantes de l'angle $5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon$, et qui sont dues à la première puissance de la force perturbatrice; et par $\delta'e$ et $\delta'\varpi$, les variations précédentes de e et de ϖ dépendantes du double de cet angle; si l'on désigne ensuite par $\delta\varepsilon$, la somme des deux inégalités de m, l'une dépendante de $5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon$, et l'autre dépendante du double de cet angle; le terme $2e.\sin.(nt+\varepsilon-\varpi)$ devient

$$(2e+2\delta e+2\delta'e).\sin.(nt+\varepsilon+\delta\varepsilon-\varpi-\delta\varpi-\delta'\varpi);$$

et par conséquent, en négligeant le cube de la force perturbatrice, il se développe dans les termes suivans,

$$\begin{aligned}
&2e.\sin.(nt+\varepsilon+\delta\varepsilon-\varpi)\\
&+2\delta e.\sin.(nt+\varepsilon-\varpi)-2e.\delta\varpi.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)\\
&+\{2\delta'e+2e.\delta\varpi.\delta\varepsilon-e.(\delta\varpi)^2\}.\sin.(nt+\varepsilon-\varpi)\\
&-\{2e.\delta'\varpi+2\delta e.\delta\varpi-2\delta\varepsilon\delta e\}.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi).
\end{aligned}$$

Le terme $2e.\sin.(nt+\varepsilon+\delta\varepsilon-\varpi)$ est celui que l'on obtient en augmentant, comme nous le prescrivons, dans la partie elliptique, le moyen mouvement nt, de $\delta\varepsilon$: les deux termes,

$$2\delta e.\sin.(nt+\varepsilon-\varpi)-2e\delta\varpi.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi),$$

forment l'inégalité dépendante de l'angle $3nt-5n't+3\varepsilon-5\varepsilon'$, que donnent les formules du n°. 1. Si l'on substitue ensuite dans les autres termes, au lieu de δe, et $\delta\varpi$, leurs valeurs données par le n°. 69 du second livre, et au lieu de $\delta'e$, et $\delta'\varpi$, leurs valeurs données par ce qui précède; leur somme donnera, en négligeant les termes dépendans du sinus et du cosinus de $nt+\varepsilon$, parce qu'ils se confondent avec l'équation du centre,

$$-\frac{3m'^2.a^2n^3}{(5n'-2n)^3}.\frac{(5m\sqrt{a}+4m'\sqrt{a'})}{m'\sqrt{a'}}.\left\{P.\left(\frac{dP'}{de}\right)+P'.\left(\frac{dP}{de}\right)\right\}.\cos.(5nt-10n't+5\varepsilon-10\varepsilon'-\varpi)$$
$$-\frac{3m'^2.a^2n^3}{(5n'-2n)^3}.\frac{(5m\sqrt{a}+4m'\sqrt{a'})}{m'\sqrt{a'}}.\left\{P'.\left(\frac{dP'}{de}\right)-P.\left(\frac{dP}{de}\right)\right\}.\sin.(5nt-10n't+5\varepsilon-10\varepsilon'-\varpi).$$

Cette inégalité peut être mise sous la forme suivante : si l'on représente par $K.\sin.(5n't-3nt+5\varepsilon'-3\varepsilon+B)$, l'inégalité de m, dépendante de $3nt-5n't+3\varepsilon-5\varepsilon'$, et par $\overline{H}.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon+\overline{A})$, la grande inégalité ; l'inégalité précédente sera par le n°. 69 du second livre,

$$\tfrac{1}{4}.\frac{(5m\sqrt{a}+4m'\sqrt{a'})}{m'\sqrt{a'}}.\overline{H}K.\sin.(5nt-10n't+5\varepsilon-10\varepsilon'-B-\overline{A}).$$

On trouvera pareillement, en n'ayant égard qu'aux variations séculaires dépendantes du carré de la force perturbatrice,

$$\begin{aligned}\delta e'=&-\frac{3m^2.a^3n^3.t}{(5n'-2n)^2.a'}.\frac{(5m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'})}{m\sqrt{a}}.\left\{P.\left(\frac{dP'}{de'}\right)-P'.\left(\frac{dP}{de'}\right)\right\}\\&+\frac{m^2.a'^2n'^2.t}{5n'-2n}.\left\{\left(\frac{dP'}{de'}\right).\left(\frac{ddP}{de'^2}\right)-\left(\frac{dP}{de'}\right).\left(\frac{ddP'}{de'^2}\right)+\left(\frac{dP'}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP}{de'd\gamma}\right)-\left(\frac{dP}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP'}{de'd\gamma}\right)\right\}\\&+\frac{mm'.aa'.nn'.t}{5n'-2n}.\left\{\left(\frac{dP'}{de}\right).\left(\frac{ddP}{de\,de'}\right)-\left(\frac{dP}{de}\right).\left(\frac{ddP'}{de\,de'}\right)+\left(\frac{dP'}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP}{de'd\gamma}\right)-\left(\frac{dP}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP'}{de'd\gamma}\right)\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\varpi'=&\ \frac{3m^2.a^3n^3t}{(5n'-2n)^2.a'e'}.\frac{\{5m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'}\}}{m\sqrt{a}}.\left\{P.\left(\frac{dP}{de'}\right)+P'.\left(\frac{dP'}{de'}\right)\right\}\\&+\frac{m^2.a'^2.n'^2.t}{(5n'-2n).e'}.\left\{\left(\frac{dP}{de'}\right).\left(\frac{ddP}{de'^2}\right)+\left(\frac{dP'}{de'}\right).\left(\frac{ddP'}{de'^2}\right)+\left(\frac{dP}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP}{de'd\gamma}\right)+\left(\frac{dP'}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP'}{de'd\gamma}\right)\right\}\\&+\frac{mm'.aa'.nn'.t}{(5n'-2n).e'}.\left\{\left(\frac{dP}{de}\right).\left(\frac{ddP}{de\,de'}\right)+\left(\frac{dP'}{de}\right).\left(\frac{ddP'}{de\,de'}\right)+\left(\frac{dP}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP}{de'd\gamma}\right)+\left(\frac{dP'}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP'}{de'd\gamma}\right)\right\}\end{aligned}$$

On trouve encore que le mouvement de m' en longitude, est affecté de l'inégalité

$$-\frac{3m^2.a^3n^3}{(5n'-2n)^3.a'}.\frac{\{3m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'}\}}{m\sqrt{a}}.\left\{\begin{aligned}&\left\{P.\left(\frac{dP'}{de'}\right)+P'.\left(\frac{dP}{de'}\right)\right\}.\cos.(4nt-9n't+4\varepsilon-9\varepsilon'-\varpi'\\&+\left\{P'.\left(\frac{dP'}{de'}\right)-P.\left(\frac{dP}{de'}\right)\right\}.\sin.(4nt-9n't+4\varepsilon-9\varepsilon'-\varpi'\end{aligned}\right.$$

Si l'on désigne par $K'.\sin.(4n't-2nt+4\varepsilon'-2\varepsilon+B')$, l'inégalité de m', dépendante de $2nt-4n't+2\varepsilon-4\varepsilon'$, et par $-\overline{H}'.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon+\overline{A}')$, la grande inégalité de m'; on aura pour son inégalité dépendante de $4nt-9n't+4\varepsilon-9\varepsilon'$,

$$\tfrac{1}{4}\ \frac{(3m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'})}{m\sqrt{a}}.\overline{H}'K'.\sin.(4nt-9n't+4\varepsilon-9\varepsilon'-B'-\overline{A}').$$

14. Les nœuds et les inclinaisons des orbites de Jupiter et de Saturne, sont assujétis à des variations analogues aux précédentes. Pour les déterminer, nous observerons que φ et φ' étant les inclinaisons des orbites sur un plan fixe; et θ et θ' étant les longitudes de leurs nœuds ascendans; on a par le n°. 60 du second livre, à cause de la petitesse de φ et de φ',

$$\varphi'.\sin.\theta' - \varphi.\sin.\theta = \gamma.\sin.\Pi;$$
$$\varphi'.\cos.\theta' - \varphi.\cos.\theta = \gamma.\cos.\Pi.$$

On a de plus, par le n°. 12,

$$\delta.(\varphi'.\sin.\theta') = -\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}.\delta.(\varphi.\sin.\theta);$$
$$\delta.(\varphi'.\cos.\theta') = -\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}.\delta.(\varphi.\cos.\theta).$$

De ces quatre équations, on tire les suivantes,

$$\delta\varphi = \frac{-m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'}}.\{\delta\gamma.\cos.(\Pi-\theta) - \gamma.\delta\Pi.\sin.(\Pi-\theta)\};$$
$$\varphi\delta\theta = \frac{-m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'}}.\{\delta\gamma.\sin.(\Pi-\theta) + \gamma.\delta\Pi.\cos.(\Pi-\theta)\};$$
$$\delta\varphi' = \frac{m\sqrt{a}}{m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'}}.\{\delta\gamma.\cos.(\Pi-\theta') - \gamma.\delta\Pi.\sin.(\Pi-\theta')\};$$
$$\varphi'\delta\theta' = \frac{m\sqrt{a}}{m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'}}.\{\delta\gamma.\sin.(\Pi-\theta') + \gamma.\delta\Pi.\cos.(\Pi-\theta')\}.$$

Les variations de φ, θ, φ' et θ' dépendent ainsi des variations de γ et de Π. On a par le n°. 12,

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{(m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'})}{m'\sqrt{a'}}.m'an.\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{dP}{d\gamma}\right).\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\\ -\left(\frac{dP'}{d\gamma}\right).\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\end{array}\right\};$$

$$\frac{\gamma.d\Pi}{dt} = -\frac{(m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'})}{m'\sqrt{a'}}.m'an.\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{dP}{d\gamma}\right).\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\\ +\left(\frac{dP'}{d\gamma}\right).\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\end{array}\right\}.$$

De-là on tire, en négligeant les quantités périodiques dont l'effet est insensible, et en observant que

$$\left(\frac{dP'}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP}{d\gamma^2}\right)-\left(\frac{dP}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP'}{d\gamma^2}\right)=0;$$

$$\delta\gamma=-\frac{3m'^2.a^2n^3}{(5n'-2n)^2}.\frac{(m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'})}{m'\sqrt{a'}}.\frac{(5m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'})}{m'\sqrt{a'}}.t.\left\{P.\left(\frac{dP'}{d\gamma}\right)-P'.\left(\frac{dP}{d\gamma}\right)\right\}$$
$$+\frac{m'^2.a^2n^2}{5n'-2n}.\frac{(m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'})}{m'\sqrt{a'}}.t.\left\{\left(\frac{dP'}{de}\right).\left(\frac{ddP}{de\,d\gamma}\right)-\left(\frac{dP}{de}\right).\left(\frac{ddP'}{de\,d\gamma}\right)\right\}$$
$$+\frac{mm'.aa'.nn'}{5n'-2n}.\frac{(m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'})}{m'\sqrt{a'}}.t.\left\{\left(\frac{dP'}{de'}\right).\left(\frac{ddP}{de'd\gamma}\right)-\left(\frac{dP}{de'}\right).\left(\frac{ddP'}{de'd\gamma}\right)\right\};$$

$$\delta\Pi=\frac{3m'^2.a^2n^3}{\gamma.(5n'-2n)^2}.\frac{(m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'})}{m'\sqrt{a'}}.\frac{(5m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'})}{m'\sqrt{a'}}.t.\left\{P.\left(\frac{dP}{d\gamma}\right)+P'.\left(\frac{dP'}{d\gamma}\right)\right\}$$
$$+\frac{m'^2.a^2n^2}{\gamma.(5n'-2n)}.\frac{(m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'})}{m'\sqrt{a'}}.t.\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{dP}{de}\right).\left(\frac{ddP}{de\,d\gamma}\right)+\left(\frac{dP'}{de}\right).\left(\frac{ddP'}{de\,d\gamma}\right)\\+\left(\frac{dP}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP}{d\gamma^2}\right)+\left(\frac{dP'}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP'}{d\gamma^2}\right)\end{array}\right\}$$
$$+\frac{mm'.aa'.nn'}{\gamma.(5n'-2n)}.\frac{(m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'})}{m'\sqrt{a'}}.t.\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{dP}{de'}\right).\left(\frac{ddP}{de'd\gamma}\right)+\left(\frac{dP'}{de'}\right).\left(\frac{ddP'}{de'd\gamma}\right)\\+\left(\frac{dP}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP}{d\gamma^2}\right)+\left(\frac{dP'}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP'}{d\gamma^2}\right)\end{array}\right\}.$$

15. Si l'on vouloit déterminer pour un temps quelconque, les élémens des orbites planétaires; il faudroit intégrer les équations différentielles (A) et (C) des n°s 55 et 59 du second livre, par la méthode exposée dans le n°. 56 du même livre; mais l'ignorance où nous sommes encore sur les valeurs des masses de plusieurs planètes, rend inutile à l'astronomie, ce calcul dans lequel il devient indispensable de faire entrer les variations séculaires dépendantes du carré de la force perturbatrice, que nous venons de déterminer, et qui sont très-sensibles pour Jupiter et Saturne. Ces variations augmentent les valeurs de $\frac{dh^{iv}}{dt}$, $\frac{dl^{iv}}{dt}$, $\frac{dp^{iv}}{dt}$, $\frac{dq^{iv}}{dt}$, $\frac{dh^{v}}{dt}$, &c. relatives à ces deux planètes, respectivement des quantités $\frac{h^{iv}.\delta e^{iv}}{e^{iv}t}$ $+\frac{l^{iv}.\delta\varpi^{iv}}{t}$, $\frac{l^{iv}.\delta e^{iv}}{e^{iv}t}-\frac{h^{iv}.\delta\varpi^{iv}}{t}$, $\frac{p^{iv}.\delta\varphi^{iv}}{\varphi^{iv}t}+\frac{q^{iv}.\delta\theta^{iv}}{t}$, &c., en ne considérant dans δe^{iv}, $\delta\varpi^{iv}$, &c., que les quantités proportionnelles au temps t, déterminées dans les n^{os} précédens. On substituera dans ces dernières quantités, au lieu de e^{iv}, sin. ϖ^{iv}, cos. ϖ^{iv}, &c., leurs valeurs

valeurs en h^{IV}, l^{IV}, &c., les équations différentielles (A) du n°. 55 du second livre, cesseront d'être linéaires; mais il sera facile de les intégrer par les méthodes connues d'approximation, lorsque la suite des siècles aura fait connoître les vraies valeurs des masses planétaires. Dans l'état actuel de l'astronomie, il suffit d'avoir les variations séculaires des élémens des orbites, en séries ordonnées par rapport aux puissances du temps, en ne portant l'approximation que jusqu'à la seconde puissance.

On a vu dans les n°s 57 et 59 du second livre, que l'état du système planétaire est stable, c'est-à-dire que les orbites de ce système restent toujours très-peu excentriques et très-peu inclinées les unes aux autres. Nous avons déduit ce résultat important du système du monde, de l'équation trouvée dans le n°. 61 du second livre,

$$\text{constante} = (e^2+\varphi^2).m\sqrt{a} \quad + (e'^2+\varphi'^2).m'\sqrt{a'} \quad + \&c.$$

En effet, le second membre de cette équation, est très-petit dans l'état actuel de ce système; il le sera donc toujours, ce qui exige que les excentricités et les inclinaisons des orbites soient toujours peu considérables. Nous allons faire voir ici que la différentielle de l'équation précédente,

$$0 = (ede+\varphi d\varphi).m\sqrt{a} \quad + (e'de'+\varphi'd\varphi').m'\sqrt{a'} \quad + \&c.$$

subsiste, en ayant même égard aux variations séculaires des élémens des orbites, déterminées dans les n^{os}. précédens; d'où il suit que ces variations n'altèrent point la stabilité du système planétaire. Pour cela, il suffit de prouver qu'en représentant par m, Jupiter; par m', Saturne; et par δe, $\delta e'$, $\delta\varphi$, $\delta\varphi'$, les variations séculaires de e, e', φ, φ', données par ce qui précède, on a

$$0 = (e\delta e+\varphi\delta\varphi).m\sqrt{a} \quad + (e'\delta e'+\varphi'\delta\varphi').m'\sqrt{a'}.$$

En substituant dans la fonction $\varphi\delta\varphi.m\sqrt{a}+\varphi'\delta\varphi'.m'\sqrt{a'}$, au lieu de φ, $\delta\varphi$, φ', $\delta\varphi'$, leurs valeurs données dans le n°. précédent, elle devient

$$\frac{m.m'.\sqrt{aa'}}{m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'}}.\gamma\delta\gamma;$$

ce qui change l'équation précédente dans celle-ci,

$$0 = e\delta e.m\sqrt{a} \quad + e'\delta e'.m'\sqrt{a'} \quad + \frac{mm'.\sqrt{aa'}}{m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'}}.\gamma\delta\gamma.$$

Considérons d'abord le premier terme de l'expression de δe, du n°. 13. Ce terme devient, en observant que $n^2a^3=1$,

$$-\frac{3m'.(5mV\overline{a}+2m'V\overline{a'})}{a.V\overline{a'}.(5n'-2n)^2}.nt.\left\{P.\left(\frac{dP'}{de}\right)-P'.\left(\frac{dP}{de}\right)\right\}.$$

Considérons ensuite le premier terme de l'expression de $\delta e'$ du même n°.

$$-\frac{3m'.(5mV\overline{a}+2m'V\overline{a'})}{a'V\overline{a}.(5n'-2n)^2}.nt.\left\{P.\left(\frac{dP'}{de'}\right)-P'.\left(\frac{dP}{de'}\right)\right\}.$$

Considérons enfin le premier terme de l'expression de $\delta\gamma$ du n°. précédent

$$-\frac{3m'.(5mV\overline{a}+2m'V\overline{a'})}{aV\overline{a'}.(5n'-2n)^2}.\frac{(mV\overline{a}+m'V\overline{a'})}{m'V\overline{a'}}.nt.\left\{P.\left(\frac{dP'}{d\gamma}\right)-P'.\left(\frac{dP}{d\gamma}\right)\right\}.$$

On aura, en n'ayant égard qu'à ces termes,

$$e\delta e.mV\overline{a}+e'\delta e'.m'V\overline{a'}+\frac{mm'.V\overline{aa'}}{mV\overline{a}+m'V\overline{a'}}.\gamma\delta\gamma$$

$$=-\frac{3mm'.(5mV\overline{a}+2m'V\overline{a'})}{(5n'-2n)^2.V\overline{aa'}}.nt.\left\{\begin{array}{l}P.\left\{e.\left(\frac{dP'}{de}\right)+e'.\left(\frac{dP'}{de'}\right)+\gamma.\left(\frac{dP'}{d\gamma}\right)\right\}\\ -P'.\left\{e.\left(\frac{dP}{de}\right)+e'.\left(\frac{dP}{de'}\right)+\gamma.\left(\frac{dP}{d\gamma}\right)\right\}\end{array}\right\};$$

or P et P' étant des fonctions homogènes en e, e', et γ, de la troisième dimension, on a

$$e.\left(\frac{dP}{de}\right)+e'.\left(\frac{dP}{de'}\right)+\gamma.\left(\frac{dP}{d\gamma}\right)=3P;$$

$$e.\left(\frac{dP'}{de}\right)+e'.\left(\frac{dP'}{de'}\right)+\gamma.\left(\frac{dP'}{d\gamma}\right)=3P';$$

on a donc

$$0=e\delta e.mV\overline{a}\quad+e'\delta e'.m'V\overline{a'}\quad+\frac{mm'.V\overline{aa'}}{mV\overline{a}+m'V\overline{a'}}.\gamma\delta\gamma.$$

Considérons ensuite, le terme de δe,

$$\frac{m'^2t}{a.(5n'-2n)}.\left\{\left(\frac{dP'}{de}\right).\left(\frac{ddP}{de^2}\right)-\left(\frac{dP}{de}\right).\left(\frac{ddP'}{de^2}\right)+\left(\frac{dP'}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP}{de\,d\gamma}\right)-\left(\frac{dP}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP'}{de\,d\gamma}\right)\right\};$$

le terme de $\delta e'$

$$\frac{mm'.t}{V\overline{aa'}.(5n'-2n)}.\left\{\left(\frac{dP'}{de}\right).\left(\frac{ddP}{de\,de'}\right)-\left(\frac{dP}{de}\right).\left(\frac{ddP'}{de\,de'}\right)+\left(\frac{dP}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP}{de'd\gamma}\right)-\left(\frac{dP}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP'}{de'd\gamma}\right)\right\};$$

enfin, le terme de $\delta\gamma$

$$\frac{m'^2.t}{a.(5n'-2n)}\cdot\frac{(m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'})}{m'\sqrt{a'}}\cdot\left\{\left(\frac{dP'}{de}\right)\cdot\left(\frac{ddP}{de\,d\gamma}\right)-\left(\frac{dP}{de}\right)\cdot\left(\frac{ddP'}{de\,d\gamma}\right)\right\};$$

on aura, en n'ayant égard qu'à ces termes et observant que l'on a

$$0=\left(\frac{dP'}{d\gamma}\right)\cdot\left(\frac{ddP}{d\gamma^2}\right)-\left(\frac{dP}{d\gamma}\right)\cdot\left(\frac{ddP'}{d\gamma^2}\right);$$

$$e\delta e.m\sqrt{a}\quad+e'\delta e'.m'\sqrt{a'}\quad+\frac{mm'.\sqrt{aa'}}{m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'}}.\gamma\delta\gamma$$

$$=\frac{m'^2.mt}{(5n'-2n).\sqrt{a}}\cdot\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{dP'}{de}\right)\cdot\left\{e.\left(\frac{ddP}{de^2}\right)+e'.\left(\frac{ddP}{de\,de'}\right)+\gamma.\left(\frac{ddP}{de\,d\gamma}\right)\right\}\\ -\left(\frac{dP}{de}\right)\cdot\left\{e.\left(\frac{ddP'}{de^2}\right)+e'.\left(\frac{ddP'}{de\,de'}\right)+\gamma.\left(\frac{ddP'}{de\,d\gamma}\right)\right\}\\ +\left(\frac{dP'}{d\gamma}\right)\cdot\left\{e.\left(\frac{ddP}{de\,d\gamma}\right)+e'.\left(\frac{ddP}{de'\,d\gamma}\right)+\gamma.\left(\frac{ddP}{d\gamma^2}\right)\right\}\\ -\left(\frac{dP}{d\gamma}\right)\cdot\left\{e.\left(\frac{ddP'}{de\,d\gamma}\right)+e'.\left(\frac{ddP'}{de'\,d\gamma}\right)+\gamma.\left(\frac{ddP'}{d\gamma^2}\right)\right\}\end{array}\right\}.$$

$\left(\frac{dP}{de}\right)$ et $\left(\frac{dP'}{de}\right)$ sont homogènes en, e, e' et γ, de la seconde dimension ; ce qui donne

$$e.\left(\frac{ddP}{de^2}\right)+e'.\left(\frac{ddP}{de\,de'}\right)+\gamma.\left(\frac{ddP}{de\,d\gamma}\right)=2.\left(\frac{dP}{de}\right);$$

$$e.\left(\frac{ddP'}{de^2}\right)+e'.\left(\frac{ddP'}{de\,de'}\right)+\gamma.\left(\frac{ddP'}{de\,d\gamma}\right)=2.\left(\frac{dP'}{de}\right);$$

de plus, $\left(\frac{dP}{d\gamma}\right)$ et $\left(\frac{dP'}{d\gamma}\right)$ sont homogènes en e, e' et γ, de la seconde dimension, ce qui donne

$$e.\left(\frac{ddP}{de\,d\gamma}\right)+e'.\left(\frac{ddP}{de'\,d\gamma}\right)+\gamma.\left(\frac{ddP}{d\gamma^2}\right)=2.\left(\frac{dP}{d\gamma}\right);$$

$$e.\left(\frac{ddP'}{de\,d\gamma}\right)+e'.\left(\frac{ddP'}{de'\,d\gamma}\right)+\gamma.\left(\frac{ddP'}{d\gamma^2}\right)=2.\left(\frac{dP''}{d\gamma}\right);$$

on a donc encore, en n'ayant égard qu'à ces termes,

$$0=e\delta e.m\sqrt{a}\quad+e'\delta e'.m'\sqrt{a'}\quad+\frac{mm'.\sqrt{aa'}}{m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'}}.\gamma\delta\gamma.$$

Considérons enfin le terme de δe,

$$\frac{mm'.t}{(5n'-2n).\sqrt{aa'}}.\left\{\left(\frac{dP'}{de'}\right).\left(\frac{ddP}{de\,de'}\right)-\left(\frac{dP}{de'}\right).\left(\frac{ddP'}{de\,de'}\right)+\left(\frac{dP'}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP}{de\,d\gamma}\right)-\left(\frac{dP}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP'}{de\,d\gamma}\right)\right\};$$

le terme de $\delta e'$

$$\frac{m^2t}{(5n'-2n).a'}.\left\{\left(\frac{dP'}{de'}\right).\left(\frac{ddP}{de'^2}\right)-\left(\frac{dP}{de'}\right).\left(\frac{ddP'}{de'^2}\right)+\left(\frac{dP'}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP}{de'\,d\gamma}\right)-\left(\frac{dP}{d\gamma}\right).\left(\frac{ddP'}{de'\,d\gamma}\right)\right\};$$

et le terme de $\delta\gamma$

$$\frac{mm'}{(5n'-2n).\sqrt{aa'}}.\frac{(m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'})}{m'\sqrt{a'}}.t.\left\{\left(\frac{dP'}{de'}\right).\left(\frac{ddP}{de'd\gamma}\right)-\left(\frac{dP}{de'}\right).\left(\frac{ddP'}{de'd\gamma}\right)\right\};$$

on aura encore, en n'ayant égard qu'à ces termes,

$$0=e\delta e.m\sqrt{a}+e'\delta e'.m'\sqrt{a'}+\frac{mm'..\sqrt{aa'}}{m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'}}.\gamma\delta\gamma.$$

Cette équation a donc lieu généralement, en ayant même égard aux termes dépendans du carré de la force perturbatrice.

La détermination du plan invariable, donnée dans le n°. 62 du second livre, est fondée sur les trois équations,

$$c=m.\sqrt{a.(1-e^2)}.\cos.\varphi+m'.\sqrt{a'.(1-e'^2)}.\cos.\varphi'+\&c.;$$
$$c'=m.\sqrt{a\,(1-e^2)}.\sin.\varphi.\sin.\theta+m'.\sqrt{a'.(1-e'^2)}.\sin.\varphi'.\sin.\theta'+\&c.;$$
$$c''=m.\sqrt{a.(1-e^2)}.\sin.\varphi.\cos.\theta+m'.\sqrt{a'.(1-e'^2)}.\sin.\varphi'.\cos.\theta'+\&c.$$

a, a', &c, étant constans par le n°. 12, en ayant même égard au carré de la force perturbatrice; la première de ces équations donne, en négligeant les produits de quatre dimensions de e, e', &c, φ, φ', &c.;

$$\text{constante}=(e^2+\varphi^2).m\sqrt{a}+(e'^2+\varphi'^2).m'\sqrt{a'}+\&c.;$$

et l'on vient de voir que les termes dépendans du carré de la force perturbatrice n'altèrent point l'exactitude de cette équation. La seconde des trois équations précédentes donne, en négligeant les produits de trois dimensions de e, e', &c, φ, φ', &c;

$$0=\delta.(\varphi.\sin.\theta).m\sqrt{a}+\delta.(\varphi'.\sin.\theta').m'\sqrt{a'}+\&c.;$$

or en ayant même égard aux termes dépendans du carré de la force perturbatrice, cette équation a lieu par le n°. 14; l'équation

$$c'=m\sqrt{a.(1-e^2)}.\sin.\varphi.\sin.\theta+m'.\sqrt{a'.(1-e'^2)}.\sin.\varphi'.\sin.\theta'+\&c.$$

n'est donc point altérée par ces termes ; et l'on trouve de la même manière, que cela a également lieu pour l'équation

$$c'' = m.\sqrt{a.(1-e^2)}.\sin.\varphi.\cos.\theta + m'.\sqrt{a'.(1-e'^2)}.\sin.\varphi'.\cos.\theta' + \&c. ;$$

ainsi le plan invariable déterminé par le n°. 62 du second livre, reste toujours invariable, en ayant même égard au carré de la force perturbatrice.

16. Les termes dépendans de ce carré, peuvent avoir une influence sensible sur les deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne : nous allons déterminer les plus considérables. On a vu dans le n°. 5 que l'expression de R ou de δR renferme la fonction

$$\frac{m'}{8}.(e^2+e'^2).\left\{2a.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)+\tfrac{1}{2}.a^2.\left(\frac{ddA^{(0)}}{da^2}\right)\right\}$$
$$+\frac{m'}{4}.ee'.\cos.(\varpi'-\varpi).\left\{4A^{(1)}+2a.\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right)+2a'.\left(\frac{dA^{(1)}}{da'}\right)+aa'.\left(\frac{ddA^{(1)}}{da\,da'}\right)\right\}$$
$$+\frac{m'}{8}.aa'.B^{(1)}.\gamma^2.$$

En y faisant croître e, e', ϖ, ϖ' et γ, de leurs variations dépendantes de l'angle $5n't-2nt$; on aura dans R un terme dépendant du même angle, et qui, à raison du diviseur $5n'-2n$, qui affecte ces variations, paroît devoir être sensible. Mais on doit observer que ce diviseur disparoît dans dR, parce que la caractéristique différentielle d, se rapportant aux seules coordonnées de m, elle se rapporte aux variations de e et de ϖ, et par conséquent, elle introduit le multiplicateur $5n'-2n$; or on a vu que la grande inégalité de m dépend principalement du terme $3a.\int\int ndt.dR$; les inégalités du rayon vecteur et de la longitude, qui dépendent des variations des excentricités et des périhélies, relatives à l'angle $5n't-2nt$, ont donc très-peu d'influence sur les deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne.

On verra dans la suite, que les inégalités les plus sensibles de ces deux planètes, dépendantes des simples excentricités des orbites, sont relatives à l'angle $nt-2n't$. Nommons $F.\cos.(nt-2n't+\varepsilon-2\varepsilon'+A)$, le terme de $\frac{\delta r}{a}$ qui dépend de cet angle, et $E.\sin.(nt-2n't+\varepsilon-2\varepsilon'+B)$,

le terme de δv, dépendant du même angle. Soient $F'.\cos.(nt-2n't+\varepsilon-2\varepsilon'+A')$, et $E'.\sin.(nt-2n't+\varepsilon-2\varepsilon'+B')$, les termes correspondans de $\frac{\delta r'}{a'}$ et de $\delta v'$. Supposons que R soit relatif à Saturne, troublé par Jupiter : en le développant par rapport aux carrés et aux produits des excentricités et des inclinaisons des orbites, et en ne considérant que l'angle $3n't-nt$, on aura par le n°. 4 une fonction de cette forme

$$\begin{aligned}
&M^{(0)}.\ e'^2.\cos.(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon-2\varpi')\\
+&M^{(1)}.ee'.\cos.(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon-\varpi-\varpi')\\
+&M^{(2)}.\ e^2.\cos.(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon-2\varpi)\\
+&M^{(3)}.\ \gamma^2.\cos.(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon-2\Pi).
\end{aligned}$$

Le premier terme $M^{(0)}.e'^2.\cos.(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon-2\varpi')$ résulte du développement de $A^{(1)}.\cos.(v'-v)$, dans l'expression de R. Il faut augmenter dans ce dernier terme, r de δr, r' de $\delta r'$, v de δv, et v' de $\delta v'$; ce qui revient à augmenter dans son développement, a de δr, a' de $\delta r'$, et $n't-nt$, de $\delta v'-\delta v$. Ce premier terme donne alors les suivans

$$\begin{aligned}
&-M^{(0)}.e'^2.(\delta v'-\delta v).\sin.(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon-2\varpi')\\
&+a.\left(\frac{dM^{(0)}}{da}\right).e'^2.\frac{\delta r}{a}.\cos.(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon-2\varpi')\\
&+a'.\left(\frac{dM^{(0)}}{da'}\right).e'^2.\frac{\delta r'}{a'}.\cos.(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon-2\varpi');
\end{aligned}$$

d'où résultent dans R, les termes

$$\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{2}.M^{(0)}.e'^2.E'.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi'-B')\\
&+\tfrac{1}{2}.M^{(0)}.e'^2.E.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi'-B)\\
&+\tfrac{1}{2}.a'.\left(\frac{dM^{(0)}}{da'}\right).e'^2.F'.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi'-A')\\
&+\tfrac{1}{2}.\ a.\left(\frac{dM^{(0)}}{da}\right).e'^2.F.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi'-A).
\end{aligned}$$

Désignons par $d'R$, la différentielle de R, prise en ne faisant varier que les coordonnées de m'. Dans les termes multipliés par E' et F' la partie $5n't-nt$ de l'angle $5n't-2nt$, est relative à ces coordonnées. Dans les termes multipliés par E et F, la partie $3n't$ du

même angle, leur est relative; on a donc, en n'ayant égard qu'aux termes précédens de R,

$$a'.d'R = \tfrac{1}{2}.(5n'-n).dt.a'M^{(0)}.E'.e'^2.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi'-B')$$
$$-\tfrac{1}{2}.(5n'-n).dt.a'^2.\left(\frac{dM^{(0)}}{da'}\right).F'.e'^2.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi'-A')$$
$$-\tfrac{3}{2}.n'dt.a'M^{(0)}.E.e'^2.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi'-B)$$
$$-\tfrac{3}{2}.n'dt.aa'.\left(\frac{dM^{(0)}}{da}\right).F.e'^2.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi'-A).$$

Le terme $M^{(1)}.ee'.\cos.(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon-\varpi-\varpi')$ résulte du développement de $A^{(2)}.\cos.(2v'-2v)$, dans l'expression de R; il faut donc faire varier dans ce terme, a de δr, a' de $\delta r'$, et $2n't-2nt$, de $2\delta v'-2\delta v$; ce qui donne les termes suivans

$$-2M^{(1)}.ee'.(\delta v'-\delta v).\sin.(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon-\varpi-\varpi')$$
$$+a.\left(\frac{dM^{(1)}}{da}\right).ee'.\frac{\delta r}{a}.\cos.(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon-\varpi-\varpi')$$
$$+a'.\left(\frac{dM^{(1)}}{da'}\right).ee'.\frac{\delta r'}{a'}.\cos.(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon-\varpi-\varpi');$$

la partie de $a'.d'R$, relative à ce terme, sera donc

$$(5n'-n).dt.a'M^{(1)}.E'.ee'.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi-\varpi'-B')$$
$$-\tfrac{1}{2}.(5n'-n).dt.a'^2.\left(\frac{dM^{(1)}}{da'}\right).F'.ee'.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi-\varpi'-A')$$
$$-3n'dt.a'M^{(1)}.E.ee'.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi-\varpi'-B)$$
$$-\tfrac{3}{2}n'dt.aa'.\left(\frac{dM^{(1)}}{da}\right).F.ee'.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi-\varpi'-A).$$

Le terme $M^{(2)}.e^2.\cos.(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon-2\varpi)$ résulte du développement de $A^{(3)}.\cos.(3v'-3v)$, dans l'expression de R; il faut donc faire varier dans ce terme, a de δr, a' de $\delta r'$, et $3n't-3nt$, de $3\delta v'-3\delta v$, ce qui donne les suivans,

$$-3M^{(2)}.e^2.(\delta v'-\delta v).\sin.(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon-2\varpi)$$
$$+a.\left(\frac{dM^{(2)}}{da}\right).e^2.\frac{\delta r}{a}.\cos.(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon-2\varpi)$$
$$+a'.\left(\frac{dM^{(2)}}{da'}\right).e^2.\frac{\delta r'}{a'}.\cos.(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon-2\varpi);$$

la partie de $a'.\mathrm{d}'R$, relative à ce terme, sera donc

$$\tfrac{3}{2}.(5n'-n).dt.a'M^{(2)}.E'.e^2.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi-B')$$
$$-\tfrac{1}{2}.(5n'-n).dt.a'^2.\left(\frac{dM^{(2)}}{da'}\right).F'.e^2.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi-A')$$
$$-\tfrac{9}{2}.n'dt.a'M^{(2)}.E.e^2.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi-B)$$
$$-\tfrac{3}{2}.n'dt.aa'.\left(\frac{dM^{(2)}}{da}\right).F.e^2.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi-A).$$

Enfin, le terme $M^{(3)}\gamma^2.\cos.(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon-2\Pi)$ résulte du terme multiplié par $\gamma^2.\cos.(3v'-v)$ dans l'expression de R; il faut donc y faire varier a de δr, a' de $\delta r'$, $3n't$ de $3\delta v'$, et nt de δv; ce qui donne les suivans

$$-M^{(3)}.\gamma^2.(3\delta v'-\delta v).\sin.(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon-2\Pi)$$
$$+a.\left(\frac{dM^{(3)}}{da}\right).\gamma^2.\frac{\delta r}{a}.\cos.(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon-2\Pi)$$
$$+a'.\left(\frac{dM^{(3)}}{da'}\right).\gamma^2.\frac{\delta r'}{a'}.\cos.(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon-2\Pi);$$

d'où résultent dans $a'.\mathrm{d}'R$, les termes suivans

$$\tfrac{3}{2}.(5n'-n).dt.a'M^{(3)}.E'.\gamma^2.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\Pi-B')$$
$$-\tfrac{1}{2}.(5n'-n).dt.a'^2.\left(\frac{dM^{(3)}}{da'}\right).F'.\gamma^2.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\Pi-A')$$
$$-\tfrac{3}{2}.n'dt.a'M^{(3)}.E.\gamma^2.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\Pi-B)$$
$$-\tfrac{3}{2}.n'dt.aa'.\left(\frac{dM^{(3)}}{da}\right).F.\gamma^2.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\Pi-A).$$

Les inégalités les plus sensibles dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites, et qui n'ont point $5n'-2n$ pour diviseur, ou qui ne dépendent point des variations des élémens, relatives à l'angle $5n't-2nt$, se rapportent à l'angle $3n't-nt$. Soit $G.\cos.(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon+C)$, la partie de $\frac{\delta r}{a}$, qui dépend de cet angle; soit $H.\sin.(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon+D)$, la partie de δv, qui dépend du même angle. Soient pareillement, $G'.\cos.(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon+C')$, et $H'.\sin.(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon+D')$, les parties de $\frac{\delta r'}{a'}$ et de $\delta v'$, relatives au même angle. L'expression

de

de R, développée par rapport aux puissances simples des excentricités, renferme les deux termes suivans,

$$N^{(0)}.e.\cos.(nt-2n't+\varepsilon-2\varepsilon'+\varpi)$$
$$+N^{(1)}.e'.\cos.(nt-2n't+\varepsilon-2\varepsilon'+\varpi').$$

Le premier de ces termes résulte du développement de $A^{(2)}.\cos.(2v'-2v)$, dans l'expression de R; il faut donc augmenter dans ce développement, a de δr, a' de $\delta r'$, et $2n't-2nt$, de $2\delta v'-2\delta v$; ce qui donne les termes suivans,

$$2N^{(0)}.e.(\delta v'-\delta v).\sin.(nt-2n't+\varepsilon-2\varepsilon'+\varpi)$$
$$+a.\left(\frac{dN^{(0)}}{da}\right).e.\frac{\delta r}{a}.\cos.(nt-2n't+\varepsilon-2\varepsilon'+\varpi)$$
$$+a'.\left(\frac{dN^{(0)}}{da'}\right).e.\frac{\delta r'}{a'}.\cos.(nt-2n't+\varepsilon-2\varepsilon'+\varpi);$$

d'où résultent dans R, les termes suivans

$$N^{(0)}.H'.e.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi+D')$$
$$-N^{(0)}.H.e.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi+D)$$
$$+\tfrac{1}{2}.a'.\left(\frac{dN^{(0)}}{da'}\right).G'.e.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi+C')$$
$$+\tfrac{1}{2}.a.\left(\frac{dN^{(0)}}{da}\right).G.e.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi+C).$$

Pour avoir la partie correspondante de $d'R$, il faut dans les termes multipliés par H' et G', faire varier l'angle $5n't-nt$; et dans les termes multipliés par H et G, ne faire varier que $2n't$; ce qui donne

$$a'.d'R=-(5n'-n).dt.a'N^{(0)}.H'.e.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi+D')$$
$$-\tfrac{1}{2}.(5n'-n).dt.a'^2.\left(\frac{dN^{(0)}}{da'}\right).G'.e.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi+C')$$
$$+2n'.dt.a'N^{(0)}.H.e.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi+D)$$
$$-n'.dt.aa'.\left(\frac{dN^{(0)}}{da}\right).G.e.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi+C).$$

Le terme $N^{(1)}.e'.\cos.(nt-2n't+\varepsilon-2\varepsilon'+\varpi')$ résulte du développement de $A^{(1)}.\cos.(v'-v)$, dans R; il faut donc faire varier dans ce terme, a de δr, a' de $\delta r'$, et $n't-nt$ de $\delta v'-\delta v$; ce qui donne les suivans,

$$N^{(1)}.e'.(\delta v'-\delta v).\sin.(nt-2n't+\varepsilon-2\varepsilon'+\varpi')$$
$$+a.\left(\frac{dN^{(1)}}{da}\right).e'.\frac{\delta r}{a}.\cos.(nt-2n't+\varepsilon-2\varepsilon'+\varpi')$$
$$+a'.\left(\frac{dN^{(1)}}{da'}\right).e'.\frac{\delta r'}{a'}.\cos.(nt-2n't+\varepsilon-2\varepsilon'+\varpi').$$

La partie de $a'.\mathrm{d}'R$, relative à ces termes, sera donc

$$-\tfrac{1}{2}.(5n'-n).dt.a'N^{(1)}.H'.e'.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi'+D')$$
$$-\tfrac{1}{2}.(5n'-n).dt.a'^2.\left(\frac{dN^{(1)}}{da'}\right).G'.e'.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi'+C')$$
$$+n'dt.a'N^{(1)}.H.e'.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi'+D)$$
$$-n'dt.aa'.\left(\frac{dN^{(1)}}{da}\right).G.e'.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi'+C).$$

Les valeurs de $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$, sont déterminées par les formules du n°. 4, en y changeant ce qui est relatif à m, dans ce qui est relatif à m', et réciproquement. Les valeurs de $N^{(0)}$ et $N^{(1)}$ seront déterminées par les équations,

$$a'N^{(0)}=-2m.a'A^{(2)}-\tfrac{1}{2}.m.aa'.\left(\frac{dA^{(2)}}{da}\right);$$
$$a'N^{(1)}=m.a'A^{(1)}-\tfrac{1}{2}.m.a'^2.\left(\frac{dA^{(1)}}{da'}\right).$$

En réunissant toutes ces expressions partielles de $a'.\mathrm{d}'R$, on aura un terme de cette forme,

$$mn'.I.dt.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-O).$$

Le terme $3a'.\iint n'dt.\mathrm{d}'R$, de l'expression de $\delta v'$, donnera ainsi,

$$-\frac{3n'^2.I.m}{(5n'-2n)^2}.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-O).$$

C'est le terme le plus sensible, de la grande inégalité de Saturne, dépendant du carré de la force perturbatrice.

Si l'expression de R, divisée par la masse perturbatrice, étoit la même pour Jupiter et pour Saturne; on auroit par le n°. 65 du second livre, l'inégalité correspondante de Jupiter, en multipliant la précédente par $-\frac{m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}}$; mais la valeur de $A^{(1)}$ n'est pas la même pour les deux planètes, et par conséquent les termes

$$M^{(0)}.e'^2.\cos.(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon-2\varpi'),$$
$$\text{et } N^{(1)}.e'.\cos.(nt-2n't+\varepsilon-2\varepsilon'+\varpi'),$$

divisés par les masses perturbatrices, sont différens pour chacune d'elles. Mais il résulte du n°. 65 du second livre, qu'en n'ayant égard qu'aux termes qui ont $(5n'-2n)^2$ pour diviseur, on a dans ce cas,

$$\int dR_{,}+\int d'R=0,$$

$R_{,}$ étant ce que devient R, relativement à Jupiter, et la caractéristique différentielle d se rapportant aux coordonnées de Jupiter; d'où il suit que l'inégalité de Jupiter qui correspond à la précédente, est

$$-\frac{3m'.n'^2.\sqrt{\frac{a'}{a}}}{(5n'-2n)^2}.I.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-O).$$

17. Dans les inégalités de Jupiter et de Saturne, dans lesquels le coefficient de t n'est pas $5n'-2n$, et ne diffère pas de cette quantité, du coefficient n pour Jupiter, ou du coefficient n' pour Saturne, il faut augmenter nt et $n't$ de leurs grandes inégalités dépendantes de $5n't-2nt$. En effet, on a vu que ces grandes inégalités doivent être ajoutées aux moyens mouvemens, dans les formules du mouvement elliptique; elles doivent donc être ajoutées aux mêmes quantités dans le développement de R. Soit $H.\cos.(i'n't-int+A)$, un terme quelconque de ce développement, et $L.\sin.(i'n't-int+B)$, l'inégalité correspondante de Jupiter. En augmentant nt et $n't$, de leurs grandes inégalités, dans le terme $H.\cos.(i'n't-int+A)$, il en résultera un terme de la forme $qH.\cos.\{i'n't-int\pm(5n't-2nt)+A+E\}$. Maintenant, la suite des opérations qui lient H à L, donne aux parties de H les diviseurs $(i'n'-in)^2$, $i'n'-in$, $i'n'-in\pm n$. La même suite d'opérations donnera à l'inégalité correspondante aux parties de $qH.\cos.\{i'n't-int\pm(5n't-2nt)+A+E\}$, les diviseurs $\{i'n'-in\pm(5n'-2n)\}^2$, $i'n'-in\pm(5n'-2n)$, $i'n'-in\pm(5n'-2n)\pm n$. Si $i'n'-in$ ou $i'n'-in\pm n$ ne sont pas très-petits de l'ordre $5n'-2n$; on peut négliger $5n'-2n$, dans ces derniers diviseurs, et alors l'inégalité correspondante à

$$qH.\cos.\{i'n't-int\pm(5n't-2nt)+A+E\}$$

sera

$$qL.\sin.\{i'n't-int\pm(5n't-2nt)+B+E\};$$

G 2

ce qui revient à augmenter dans $L.\sin.(i'n't-int+B)$, nt et $n't$, des grandes inégalités.

Il faut pareillement augmenter dans les termes dépendans des simples excentricités, les quantités e, e', ϖ, ϖ', de leurs variations dépendantes de l'angle $5n't-2nt$; mais on s'assurera facilement qu'il n'en résulte que des inégalités insensibles.

18. Les coefficiens des inégalités des planètes varient à raison des variations séculaires des élémens des orbites : on peut y avoir égard de la manière suivante : on mettra d'abord l'inégalité relative à un angle quelconque $i'n't-int$, sous cette forme,

$$P.\sin.(i'n't-int+i'\epsilon'-i\epsilon)+P'.\cos.(i'n't-int+i'\epsilon'-i\epsilon).$$

On déterminera les valeurs de P et de P', pour l'époque de 1750; en faisant ensuite,

$$\text{tang.}A=\frac{P'}{P}\ ;\quad L=\sqrt{P^2+P'^2};$$

le signe de $\sin.A$ étant le même que celui de P', et son cosinus étant du même signe que P; l'inégalité dont il s'agit sera,

$$L.\sin.(i'n't-int+i'\epsilon'-i\epsilon+A).$$

On déterminera les valeurs de P et de P' pour 1950, en ayant égard aux variations séculaires des élémens des orbites; et l'on aura ainsi pour cette inégalité, en 1950,

$$(L+\delta L).\sin.(i'n't-int+i'\epsilon'-i\epsilon+A+\delta A);$$

en exprimant donc par t, le nombre des années juliennes écoulées depuis 1750, l'inégalité précédente relative au temps t, prendra cette forme,

$$\left(L+\frac{t.\delta L}{200}\right).\sin.\left\{i'n't-int+i'\epsilon'-i\epsilon+A+\frac{t.\delta A}{200}\right\}.$$

Sous cette forme, elle pourra s'étendre plusieurs siècles avant et après 1750. Mais ce calcul ne doit avoir lieu que pour les inégalités un peu considérables.

Relativement aux deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, il sera utile de porter l'approximation jusqu'au carré du temps, dans la partie qui a pour diviseur $(5n'-2n)^2$. Cette partie de l'expression de δv est par le n°. 8,

$$-\frac{6m'.n^2}{(5n'-2n)^2}.\left\{\begin{array}{l}\left\{aP'+\frac{2a.dP'}{(5n'-2n).dt}-\frac{3a.ddP'}{(5n'-2n)^2.dt^2}\right\}.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\\ -\left\{aP-\frac{2a.dP'}{(5n'-2n).dt}-\frac{3a.ddP}{(5n'-2n)^2.dt^2}\right\}.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\end{array}\right\};$$

les valeurs de P, P', et de leurs différences, étant relatives à un temps quelconque t. En les développant en séries ordonnées par rapport aux puissances du temps, et en ne conservant que sa seconde puissance, et les différences premières et secondes de P et de P'; la quantité précédente devient,

$$-\frac{6m'.n^2}{(5n'-2n)^2}.\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}aP'+\frac{2a.dP}{(5n'-2n).dt}-\frac{3a.ddP'}{(5n'-2n)^2.dt^2}\\ +t.\left\{a.\frac{dP'}{dt}+\frac{2a.ddP}{(5n'-2n).dt^2}\right\}+\frac{1}{2}t^2.a.\frac{ddP'}{dt^2}\end{array}\right\}.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\\ -\left\{\begin{array}{l}aP-\frac{2a.dP'}{(5n'-2n).dt}-\frac{3a.ddP}{(5n'-2n)^2.dt^2}\\ +t.\left\{a.\frac{dP}{dt}-\frac{2a.ddP'}{(5n'-2n).dt^2}\right\}+\frac{1}{2}t^2.a.\frac{ddP}{dt^2}\end{array}\right\}.\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\end{array}\right\};$$

les valeurs de P, P' et de leurs différences étant ici relatives à l'époque de 1750, et déterminées par la méthode du n°. 8: les autres parties de la grande inégalité de m étant peu considérables, il suffira d'avoir égard, par ce qui précède, à la première puissance du temps. Cette grande inégalité prendra ainsi la forme suivante:

$$\begin{array}{l}(A+B.t+C.t^2).\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\\ +(A'+B'.t+C'.t^2).\cos.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon).\end{array}$$

On donnera à la grande inégalité de m', la même forme sous laquelle il sera facile de réduire en tables, ces inégalités.

Si l'on veut réduire l'inégalité précédente, à un seul terme; on la calculera pour les trois époques de 1750, 2250 et 2750. Soit $\mathfrak{E}.\sin.(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon+\Lambda)$, cette grande inégalité pour 1750; soient $\mathfrak{E}_{,}$, $\Lambda_{,}$; $\mathfrak{E}_{,,}$, $\Lambda_{,,}$, ce que deviennent $\mathfrak{E}$ et Λ, aux époques de 2250 et de 2750. Cette inégalité relative à un temps quelconque t, sera

$$\left(\mathfrak{E}+t.\frac{d\mathfrak{E}}{dt}+\frac{1}{2}t^2.\frac{dd\mathfrak{E}}{dt^2}\right).\sin.\left\{5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon+\Lambda+t.\frac{d\Lambda}{dt}+\frac{1}{2}t^2.\frac{dd\Lambda}{dt^2}\right\};$$

les différences de β et de λ se rapportant ici à l'époque de 1750.
On aura ensuite par le n°. 8,

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{4\beta_{,} - 3\beta - \beta_{,,}}{1000}\,; \qquad \frac{dd\beta}{dt^2} = \frac{\beta_{,,} - 2\beta_{,} + \beta}{250000}\,;$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{4\lambda_{,} - 3\lambda - \lambda_{,,}}{1000}\,; \qquad \frac{dd\lambda}{dt^2} = \frac{\lambda_{,,} - 2\lambda_{,} + \lambda}{250000}.$$

Conformément à la remarque que nous avons faite dans le n°. 1, ces deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, doivent être respectivement appliquées à leurs moyens mouvemens.

CHAPITRE III.

Des perturbations planétaires dues à l'ellipticité du soleil.

18. Le soleil étant doué d'un mouvement de rotation, sa figure ne doit pas être exactement sphérique. Nous allons déterminer l'influence de son ellipticité, sur les mouvemens des planètes. Si l'on nomme ρ cette ellipticité; q le rapport de la force centrifuge à la pesanteur, à l'équateur solaire; et μ la déclinaison d'une planète m relativement à cet équateur; si de plus, on prend pour unité la masse du soleil, et que l'on nomme D son demi-diamètre; il résulte du n°. 35 du troisième livre, que l'ellipticité du soleil ajoute à la fonction R du n°. 46 du second livre, la quantité

$$(\rho - \tfrac{1}{2}q) \cdot \frac{D^2}{r^3} \cdot (\mu^2 - \tfrac{1}{3});$$

l'équation différentielle en $r\delta r$ du n°. 46 du second livre, deviendra donc, en n'ayant égard qu'à cette partie de R, en négligeant le carré de μ, et en observant qu'ici $\int dR = g + R$, g étant une arbitraire,

$$o = \frac{d^2 . r\delta r}{dt^2} + \frac{n^2 a^3 . r\delta r}{r^3} + 2g + \frac{(\rho - \frac{1}{2}q) . D^2}{3r^3}.$$

Pour déterminer la constante g, nous observerons que la formule (Y) du n°. 46 du second livre, donne dans δv, la quantité

$$3a . ngt + (\rho - \tfrac{1}{2}q) . \frac{D^2}{a^2} . nt.$$

nt exprimant le moyen mouvement de la planète, cette quantité doit être nulle; on a donc

$$g = -\frac{(\rho - \frac{1}{2}q) . D^2}{3a^3};$$

et par conséquent l'équation différentielle en $r\delta r$, devient, en observant que $n^2 a^3 = 1$, et négligeant le carré de e,

$$0 = \frac{d^2.r\delta r}{dt^2} + n^2.r\delta r.\{1 + 3e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)\} - \frac{2.(\rho-\frac{1}{2}q)}{3}.n^2.D^2$$
$$+ \frac{(\rho-\frac{1}{2}q)}{3}.n^2.D^2.\{1 + 3e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)\};$$

ce qui donne en intégrant,

$$\frac{r\delta r}{a^2} = \tfrac{1}{3}.(\rho-\tfrac{1}{2}q).\frac{D^2}{a^2}.\{1 - 3e.nt.\sin.(nt+\varepsilon-\varpi)\}.$$

La partie elliptique de $\frac{r^2}{a^2}$ est $1 - 2e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)$; en y faisant donc varier ϖ de $\delta\varpi$, on aura

$$\frac{r\delta r}{a^2} = -e\delta\varpi.\sin.(nt+\varepsilon-\varpi).$$

Si l'on compare cette expression de $\frac{r\delta r}{a^2}$, à la précédente ; on aura

$$\delta\varpi = (\rho-\tfrac{1}{2}q).\frac{D^2}{a^2}.nt = (\rho-\tfrac{1}{2}q).\frac{D^2.t}{a^{\frac{7}{2}}};$$

l'effet le plus sensible de l'ellipticité du soleil sur le mouvement de la planète dans son orbite, est donc un mouvement direct dans son périhélie ; mais ce mouvement étant réciproque à la racine carrée de la septième puissance du grand axe de l'ellipse planétaire, on voit qu'il ne peut être sensible que pour Mercure.

Pour avoir l'effet de l'ellipticité du soleil sur la position de l'orbite ; reprenons la troisième des équations (P) du n°. 46 du second livre. Cette équation peut être mise sous la forme suivante :

$$0 = \frac{ddz}{dt^2} + \frac{n^2a^3.z}{r^3} + \left(\frac{dR}{dz}\right).$$

Prenons pour plan fixe celui de l'équateur solaire, ce qui donne $\mu^2 = \frac{z^2}{r^2}$. En observant ensuite que $r^2 = x^2+y^2+z^2$, on aura

$$\left(\frac{dR}{dz}\right) = 3.(\rho-\tfrac{1}{2}q).\frac{n^2.D^2}{a^2}.z;$$

l'équation différentielle précédente devient ainsi,

$$0 = \frac{ddz}{dt^2} + n^2z.\left\{1 - \frac{3\delta r}{a} + 3.(\rho-\tfrac{1}{2}q).\frac{D^2}{a^2}\right\};$$

or on a par ce qui précède,

$$\frac{\delta r}{a} = \tfrac{1}{3}.(\rho-\tfrac{1}{2}q).\frac{D^2}{a^2};$$

on

on a donc

$$o = \frac{ddz}{dt^2} + n^2 z . \left\{ 1 + 2 . (\rho - \tfrac{1}{2} q) . \frac{D^2}{a^2} \right\};$$

ce qui donne en intégrant,

$$z = \varphi . \sin . \left\{ nt . \left\{ 1 + (\rho - \tfrac{1}{2} q) . \frac{D^2}{a^2} \right\} - \theta \right\};$$

φ étant l'inclinaison de l'orbite à l'équateur solaire, et θ étant une constante arbitraire. Ainsi les nœuds de l'orbite sur cet équateur, ont un mouvement rétrograde égal au mouvement direct du périhélie, et qui par conséquent ne peut être sensible que pour Mercure. On voit en même temps que l'ellipticité du soleil n'ayant aucune influence ni sur l'excentricité de l'orbe de la planète, ni sur son inclinaison à l'équateur solaire; elle ne peut pas altérer la stabilité du système planétaire.

CHAPITRE IV.

Des perturbations du mouvement des planètes, produites par l'action de leurs satellites.

19. Les théorêmes du n°. 10 du second livre, offrent un moyen aussi simple qu'exact, pour déterminer les perturbations des planètes, dues à l'action de leurs satellites. On a vu dans le n°. cité, que le centre commun de gravité de la planète et de ses satellites, décrit à très-peu-près un orbe elliptique autour du soleil. En considérant cet orbe, comme étant l'ellipse même de la planète ; la position respective des satellites entre eux, et par rapport au soleil, donnera celle de la planète par rapport au centre commun de gravité, et par conséquent les perturbations que la planète éprouve de la part de ses satellites. Soit M la masse de la planète ; R, le rayon vecteur du centre commun de gravité ; U, l'angle que ce rayon fait avec une droite invariable prise sur l'orbite de ce centre, et d'où l'on compte les longitudes. Soient m, m', &c. les masses des satellites ; r, r', &c. leurs rayons vecteurs ; v, v', &c. leurs longitudes vraies ; s, s', &c. leurs latitudes au-dessus de l'orbite du centre commun de gravité. Enfin, soient X, Y, Z les coordonnées rectangles de la planète, en supposant leur origine au centre commun de gravité, et prenant le rayon R pour l'axe des X, Z étant la coordonnée perpendiculaire au plan de l'orbite de ce centre. On aura à très-peu-près, par la propriété du centre de gravité, et en observant que les masses des satellites sont très-petites par rapport à celle de la planète,

$$0 = M.X + mr.\cos.(v-U) + m'r'.\cos.(v'-U) + \&c.;$$
$$0 = M.Y + mr.\sin.(v-U) + m'r'.\sin.(v'-U) + \&c.;$$
$$0 = M.Z + m.rs + m'.r's' + \&c.$$

La perturbation du rayon vecteur est à très-peu-près égale à X, et par conséquent à

$$-\frac{m}{M}.r.\cos.(v-U) \quad -\frac{m'}{M}.r'.\cos.(v'-U)-\&c.$$

La perturbation du mouvement de la planète en longitude est à très-peu-près $\frac{Y}{R}$, et par conséquent égale à

$$-\frac{m}{M}.\frac{r}{R}.\sin.(v-U) \quad -\frac{m'}{M}.\frac{r'}{R}.\sin.(v'-U)-\&c.$$

Enfin, la perturbation du mouvement de la planète en latitude, est à très-peu-près $\frac{Z}{R}$, et par conséquent égale à

$$-\frac{m}{M}.\frac{rs}{R}-\frac{m'}{M}.\frac{r's'}{R}-\&c.$$

Ces diverses perturbations ne sont sensibles que pour la terre troublée par la lune; les masses des satellites de Jupiter sont si petites par rapport à celle de la planète, et leurs élongations vues du soleil, sont si peu considérables, que ces perturbations sont insensibles. Il y a tout lieu de croire que cela a également lieu pour Saturne et Uranus.

CHAPITRE V.

Considérations sur la partie elliptique du rayon vecteur et du mouvement des planètes.

20. Nous avons déterminé dans le chapitre VI du second livre, les arbitraires, de manière que le moyen mouvement et l'équation du centre ne reçussent aucun changement par l'action mutuelle des planètes ; or on a dans l'hypothèse elliptique, $\frac{1+m}{a^3}=n^2$, la masse du soleil étant prise pour unité ; ce qui donne

$$a=n^{-\frac{2}{3}}.(1+\tfrac{1}{3}m);$$

tel est donc le grand axe dont on doit faire usage dans la partie elliptique du rayon vecteur.

Si, comme nous le ferons dans la suite, on suppose

$$a=n^{-\frac{2}{3}}; \quad a'=n'^{-\frac{2}{3}}, \quad \&c.;$$

il faudra dans le calcul de la partie elliptique du rayon vecteur, augmenter respectivement a, a', &c., des quantités $\frac{1}{3}ma$, $\frac{1}{3}m'a'$, &c.; mais cette augmentation n'est sensible que pour Jupiter et Saturne.

On appliquera ensuite au rayon vecteur, les corrections données par les formules du n°. 50 du second livre, et par les n^{os} précédens. Ces corrections contiennent les deux termes,

$$-m'a.fe.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi) \quad -m'a.f'e'.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi');$$

f et f' étant déterminés par les deux équations suivantes,

$$f=\tfrac{2}{3}.a^2.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)+\tfrac{1}{4}a^3.\left(\frac{ddA^{(0)}}{da^2}\right)$$

$$f'=\tfrac{1}{4}.\left\{aA^{(1)}-a^2.\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right)-a^3.\left(\frac{ddA^{(1)}}{da^2}\right)\right\};$$

équations données par le n°. 50 du second livre, en changeant seulement le signe du terme $a^3.\left(\frac{ddA^{(1)}}{da^2}\right)$ dans l'expression de f' du n°. cité ; ce terme devant être affecté du signe $-$. La partie précédente du rayon vecteur peut être réunie dans une même table, avec la partie elliptique de ce rayon.

CHAPITRE VI.

Valeurs numériques des diverses quantités qui entrent dans les expressions des inégalités planétaires.

21. Pour réduire en nombres, les formules exposées dans le second livre et dans les chapitres précédens ; on est parti des données suivantes :

Masses des planètes, celle du soleil étant prise pour unité.

Mercure............ $m = \frac{1}{2025810}$;

Vénus............ $m' = \frac{1}{383137}$;

La Terre........... $m'' = \frac{1}{329630}$;

Mars.............. $m''' = \frac{1}{1846082}$;

Jupiter............ $m^{\text{IV}} = \frac{1}{1067{,}09}$;

Saturne............ $m^{\text{V}} = \frac{1}{3359{,}40}$;

Uranus............ $m^{\text{VI}} = \frac{1}{19504}$.

De toutes ces masses, celle de Jupiter est la mieux connue : je l'ai conclue de l'équation suivante qui résulte du n°. 25 du second livre. Si l'on nomme T la révolution sydérale d'une planète m; T, celle d'un de ses satellites, dont q est le sinus de l'angle sous lequel le rayon moyen de son orbite est vu du centre du soleil à la moyenne distance de la planète à ce centre ; la masse de la planète, celle du soleil étant prise pour unité, est

$$\frac{q^3 \cdot \left(\frac{\mathrm{T}}{T}\right)^2}{1 - q^3 \cdot \left(\frac{\mathrm{T}}{T}\right)^2}.$$

On a, relativement au quatrième satellite,

$$q = \sin. 1530'',38;$$
$$\mathrm{T} = 4332^{\text{jours}},602208;$$
$$T = 16^{\text{jours}},6890;$$

d'où l'on tire,

$$m = \frac{1}{1067,09}.$$

La masse de Saturne a été conclue de la même manière, en supposant la révolution sydérale de son sixième satellite, égale à $15^{\text{jours}},9453$, et l'angle sous lequel le rayon moyen de l'orbe de ce satellite est vu du soleil, dans les distances moyennes de Saturne, égal à $552'',47$. La masse d'Uranus a pareillement été conclue, en supposant, conformément aux observations d'Herschel, la durée de la révolution sydérale de son quatrième satellite, égale à $13^{\text{jours}},4559$, et le rayon moyen de l'orbe de ce satellite, vu du soleil, dans la moyenne distance d'Uranus, égal à $136'',512$. Mais les plus grandes élongations de ces satellites, à leurs planètes respectives, ne sont pas aussi certaines que celle du quatrième satellite de Jupiter. Leur observation mérite toute l'attention des Astronomes.

La masse de la terre a été déterminée de cette manière. Si l'on prend pour unité, la moyenne distance de la terre au soleil; l'arc décrit par la terre dans une seconde de temps, sera le rapport de la circonférence au rayon, divisé par le nombre des secondes de l'année sydérale, ou par $36525638'',4$. En divisant le carré de cet arc, par le diamètre, on aura $\frac{1479565}{10^{20}}$ pour son sinus verse : c'est la quantité dont la terre tombe vers le soleil, pendant une seconde, en vertu de son mouvement relatif autour de cet astre. Sur le parallèle terrestre dont le quarré du sinus de latitude est $\frac{1}{3}$, l'attraction de la terre fait tomber les corps dans une seconde, de $3,66553^{\text{mètres}}$. Pour réduire cette attraction, à la moyenne distance de la terre au soleil; il faut la multiplier par le carré du sinus de la parallaxe solaire, et diviser le produit, par le nombre de mètres que renferme cette distance; or le rayon terrestre sur le parallèle que nous considérons, est de $6369374^{\text{mètres}}$; en divisant donc

ce nombre par le sinus de la parallaxe solaire supposée égale à 27″,2, on aura le rayon moyen de l'orbe terrestre exprimé en mètres; d'où il suit que l'effet de l'attraction de la terre, à la moyenne distance de cette planète au soleil, est égal au produit de la fraction $\frac{3,66553}{6369374}$, par le cube du sinus de 27″,2; il est par conséquent égal à $\frac{4,48855}{10^{20}}$. En retranchant cette fraction de $\frac{1479565}{10^{20}}$, on aura $\frac{1479560,5}{10^{20}}$, pour l'effet de l'attraction du soleil, à la même distance; les masses du soleil et de la terre sont donc dans le rapport des nombres, 1479560,5, et 4,4885; d'où il suit que la masse de la terre est $\frac{1}{329630}$. Si la parallaxe du soleil est un peu différente de celle que nous avons admise; la valeur de la masse de la terre doit varier comme le cube de cette parallaxe, comparé à celui de 27″,2.

J'ai conclu la masse de Vénus, des formules que je donnerai dans la suite, de la diminution séculaire de l'obliquité de l'écliptique à l'équateur, en supposant cette diminution égale à 15430″. C'est en effet celle qui résulte des observations qui me paroissent mériter le plus de confiance. Quant aux masses de Mercure et de Mars, j'ai supposé, d'après les observations, les diamètres moyens de Mercure, Mars et Jupiter, vus à la moyenne distance de la terre au soleil, respectivement de 21″,60; 35″,19, et 626″,04. Ces diamètres donneroient leurs masses, celle de Jupiter étant connue, si l'on connoissoit la loi de leurs densités; or, en comparant les masses de la Terre, de Jupiter et de Saturne, à leurs volumes; on trouve que la densité de ces trois planètes, est à-peu-près en raison inverse de leurs moyennes distances au soleil; j'ai donc adopté la même hypothèse, relativement aux trois planètes, Mercure, Mars et Jupiter; d'où résultent les valeurs précédentes des masses de Mercure et de Mars. L'irradiation et les autres difficultés qu'offre l'observation des diamètres planétaires, jointes à l'incertitude de l'hypothèse adoptée sur la loi de leurs densités, rend ces valeurs d'autant plus incertaines, que cette hypothèse s'éloigne de la vérité, relativement aux masses de Vénus et d'Uranus. Heureuse-

ment, Mercure et Mars n'ont qu'une très-petite influence sur le système planétaire, et il sera facile de corriger les résultats suivans qu'elles affectent, lorsque le développement des inégalités séculaires aura fait connoître exactement leurs masses.

22. *Moyens mouvemens sydéraux des planètes, pour une année julienne de* $365^{jours}\frac{1}{4}$, *ou valeurs de* n, n′, &c.

Mercure..........	$n =$	$16608076'',50$;
Vénus	$n' =$	$6501980'',00$;
La Terre...........	$n'' =$	$3999930'',09$;
Mars..............	$n''' =$	$2126701'',00$;
Jupiter	$n^{IV} =$	$337210'',78$;
Saturne	$n^{V} =$	$135792'',34$;
Uranus	$n^{VI} =$	$47606'',62$.

En employant pour n, n', &c. ces valeurs, le temps t désigne un nombre d'années juliennes. De-là, en prenant pour unité la moyenne distance du soleil à la terre, on a conclu, par la loi de Kepler, les distances moyennes suivantes, des planètes au soleil.

Distances moyennes des planètes au soleil, ou demi-grands axes de leurs orbites.

Mercure...........	$a =$	$0,38709812$;
Vénus	$a' =$	$0,72333230$;
La Terre	$a'' =$	$1,00000000$;
Mars..............	$a''' =$	$1,52369352$;
Jupiter	$a^{IV} =$	$5,20116636$;
Saturne	$a^{V} =$	$9,53787090$;
Uranus............	$a^{VI} =$	$19,18330500$.

L'action mutuelle des planètes altère un peu ces moyennes distances : nous déterminerons dans la suite ces altérations.

Rapports

Rapports des excentricités aux moyennes distances, ou valeurs de e, e', &c. pour 1750.

Mercure............ $e = 0{,}20551320$;
Vénus .... $e' = 0{,}00688405$;
La Terre .... $e'' = 0{,}01681395$;
Mars................. $e''' = 0{,}09308767$;
Jupiter .... $e^{\text{IV}} = 0{,}04807670$;
Saturne .... $e = 0{,}05622460$;
Uranus .... $e^{\text{VI}} = 0{,}04669950$.

Longitudes des périhélies en 1750, ou valeurs de ϖ, ϖ', &c.

Mercure............ $\varpi = 81^\circ{,}7401$;
Vénus .... $\varpi' = 142^\circ{,}1241$;
La Terre .... $\varpi'' = 109^\circ{,}5790$;
Mars................ $\varpi''' = 368^\circ{,}3037$;
Jupiter.............. $\varpi^{\text{IV}} = 11^\circ{,}5012$;
Saturne............. $\varpi^{\text{V}} = 97^\circ{,}9466$;
Uranus.............. $\varpi^{\text{VI}} = 185^\circ{,}1262$.

Inclinaisons des orbites à l'écliptique en 1750, ou valeurs de φ, φ', &c.

Mercure............ $\varphi = 7^\circ{,}7778$;
Vénus .... $\varphi' = 3^\circ{,}7701$;
Mars................ $\varphi''' = 2\ {,}0556$;
Jupiter.............. $\varphi^{\text{IV}} = 1\ {,}4636$;
Saturne .... $\varphi^{\text{V}} = 2\ {,}7762$;
Uranus .... $\varphi^{\text{VI}} = 0\ {,}8596$.

Longitudes des nœuds ascendans sur l'écliptique de 1750, ou valeurs de θ, θ', &c.

Mercure .... $\theta = 50^\circ{,}3836$;
Vénus.............. $\theta' = 82^\circ{,}7093$;
Mars .... $\theta''' = 52^\circ{,}9376$;
Jupiter .... $\theta^{\text{IV}} = 108^\circ{,}7846$;
Saturne............ $\theta^{\text{V}} = 123^\circ{,}8960$;
Uranus............ $\theta^{\text{VI}} = 80^\circ{,}7015$.

Toutes ces longitudes sont comptées de l'équinoxe moyen du printemps, à l'époque du 31 décembre 1749, à midi, temps moyen à Paris. On doit observer ici, que l'on entend par *longitude du périhélie*, la distance du périhélie au nœud ascendant, comptée sur l'orbite, plus la longitude du nœud.

23. On a obtenu les résultats suivans, par les formules du n°. 49 du second livre.

MERCURE ET VÉNUS.

$$\alpha = \frac{a}{a'} = 0,53516076;$$

d'où l'on a conclu,

$$b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 2,145969210;$$

$$b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = -0,515245873.$$

Ensuite,

$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,1721751$; $b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,6057052$; $b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,2465877$;
$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,1107665$; $b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,0520855$; $b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0,0251378$;
$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 0,0123166$; $b_{\frac{1}{2}}^{(7)} = 0,0060633$; $b_{\frac{1}{2}}^{(8)} = 0,0029287$;
$b_{\frac{1}{2}}^{(9)} = 0,0012758$.

$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0,780206$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1,457891$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 1,070071$;
$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0,691487$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 0,423818$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 0,252376$;
$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha} = 0,147708$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{d\alpha} = 0,085953$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(8)}}{d\alpha} = 0,050726$.

$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 2,756285$; $\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 2,426165$; $\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 3,395022$;
$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 3,381072$; $\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} = 2,826559$; $\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^2} = 2,137906$;
$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^2} = 1,511016$; $\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{d\alpha^2} = 1,014134$.

$$\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^3} = 11,308703\ ; \quad \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} = 12,064245\ ; \quad \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} = 11,983424;$$

$$\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} = 14,584366\ ; \quad \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3} = 16,067040\ ; \quad \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^3} = 15,617274\ ;$$

$$\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^3} = 13,720218.$$

$$\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^4} = 69,60594\ ; \quad \frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^4} = 82,36773\ ; \quad \frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^4} = 92,72610\ ;$$

$$\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^4} = 105,33962.$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 4,214154\ , \quad b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 3,035376\ ; \quad b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 1,950536;$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 1,192372\ ; \quad b_{\frac{3}{2}}^{(4)} = 0,708667\ ; \quad b_{\frac{3}{2}}^{(5)} = 0,413762\ ;$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(6)} = 0,238807.$$

$$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 12,50630\ ; \quad \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 9,76666\ ; \quad \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 7,08399\ ;$$

$$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 4,88781.$$

$$\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 78,09476\ ; \quad \frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} = 67,14764.$$

MERCURE ET LA TERRE.

$$\alpha = \frac{a}{a''} = 0,38709812\ ;$$

d'où l'on a conclu,

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,07565247\ ;$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,37970591.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,081980\ ;\quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,411140\ ;\quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,120178\ ;$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,038900\ ;\quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,013202\ ;\quad b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0,004603\ ;$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 0,001629\ ;\quad b_{\frac{1}{2}}^{(7)} = 0,000573\ ;\quad b_{\frac{1}{2}}^{(8)} = 0,000177.$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0,464378\ ;\quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1,199633\ ;\quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0,665739\ ;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0,316756\ ;\quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 0,141792\ ;\quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 0,061433\ ;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha} = 0,026130\ ;\quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{d\alpha} = 0,011153.$$

$$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 1,672199\ ;\quad \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 1,220775\ ;\quad \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 2,235935\ ;$$

$$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 1,852364\ ;\quad \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} = 1,197245\ ;\quad \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^2} = 0,670874.$$

$$\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} = 5,49232\ ;\quad \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} = 5,45663\ ;\quad \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3} = 6,51373.$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 2,871833\ ;\quad b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 1,576062\ ;\quad b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 0,747619\ ;$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 0,334212\ ;\quad b_{\frac{3}{2}}^{(4)} = 0,153779.$$

$$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 3,05535.$$

MERCURE ET MARS.

$$\alpha = \frac{a}{a'''} = 0,25405312\ ;$$

d'où l'on a conclu,

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,03240384\ ;$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -\ 0,25198657.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2{,}033500\ ; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0{,}260462\ ; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0{,}049765\ ;$$
$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0{,}010546\ ; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0{,}002331\ ; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0{,}000538.$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0{,}273829\ ; \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1{,}077839\ ; \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0{,}402980;$$
$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0{,}127139\ ; \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 0{,}037781.$$

$$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 1{,}244725\ ; \quad \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 0{,}656780\ ; \quad \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 1{,}778641\ ;$$
$$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 1{,}050458.$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 2{,}322536\ ; \quad b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 0{,}863876\ ; \quad b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 0{,}272085.$$

MERCURE ET JUPITER.

$$\alpha = \frac{a}{a^{\text{iv}}} = 0{,}07442555\ ;$$

d'où l'on a conclu,

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2{,}00277053\ ;$$
$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0{,}07437397.$$

En déterminant, au moyen de ces équations et des formules du n°. 49 du second livre, les valeurs de $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$, $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$, &c.; on a reconnu qu'elles deviennent de plus en plus inexactes, ce qui a lieu dans tous les cas où α est peu considérable; parce qu'alors ces valeurs sont les différences de nombres qui diffèrent très-peu entre eux; en sorte qu'il faudroit avoir ces nombres avec une très-grande précision, pour déterminer exactement ces différences, ce qui exigeroit l'usage des tables de logarithmes à dix ou douze décimales.

Pour obvier à cet inconvénient, il faut recourir à la valeur de $b_s^{(i)}$ en séries : on trouve par le n°. cité,

$$b_s^{(i)}=2.\frac{s.\overline{s+1}.\overline{s+2}\ldots\ldots\overline{s+i-1}}{1.2.3\ldots\ldots i}.\alpha^i.\left\{\begin{array}{l}1+\frac{s}{1}.\frac{s+i}{i+1}.\alpha^2+\frac{s.\overline{s+1}}{1.2}.\frac{\overline{s+i}.\overline{s+i+1}}{\overline{i+1}.\overline{i+2}}.\alpha^4\\ +\frac{s.\overline{s+1}.\overline{s+2}}{1.2.3}.\frac{\overline{s+i}.\overline{s+i+1}.\overline{s+i+2}}{\overline{i+1}.\overline{i+2}.\overline{i+3}}.\alpha^6+\&c.\end{array}\right\}.$$

Cette valeur de $b_s^{(i)}$ est ici très-convergente, à cause de la petitesse de α : c'est par son moyen que l'on a déterminé les valeurs de $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$, $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$, &c.; $b_{\frac{3}{2}}^{(0)}$, &c., dans tous les cas où α est peu considérable. On a trouvé de cette manière, pour Mercure et Jupiter,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)}=2,002778\ ;\quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)}=0,074581\ ;\quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)}=0,004164;$$
$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)}=0,000258\ ;\quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)}=0,000017.$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha}=0,074891\ ;\quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha}=1,006269\ ;\quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha}=0,111380\ ;$$
$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha}=0,010428.$$

$$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2}=1,018876\ ;\quad \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2}=0,171781\ ;\quad \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2}=1,499780.$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)}=2,025143\ ;\quad b_{\frac{3}{2}}^{(1)}=0,225613\ ;\quad b_{\frac{3}{2}}^{(2)}=0,020984.$$

MERCURE ET SATURNE.

$$\alpha=\frac{a}{a^{v}}=0,04058547\ ;$$

d'où l'on a conclu,

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)}=2,00082368\ ;$$
$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}=-0,04057711.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2{,}000823\ ; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0{,}040610\ ; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0{,}001236\ ;$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0{,}000042\ ; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0{,}000001.$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0{,}040662\ ; \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1{,}001841\ ; \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0{,}060919\ ;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0{,}003085.$$

$$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 1{,}003904\ ; \quad \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 0{,}091840\ ; \quad \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 1{,}469188.$$

MERCURE ET URANUS.

$$\alpha = \frac{a}{a^{\text{VI}}} = 0{,}02017895\ ;$$

d'où l'on a conclu,

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2{,}00020360\ ;$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0{,}02017792.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2{,}000182\ ; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0{,}020183\ ; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0{,}000306\ ;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0{,}020196\ ; \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1{,}000913.$$

VÉNUS ET LA TERRE.

$$\alpha = \frac{a'}{a''} = 0{,}72333230\ ;$$

d'où l'on a conclu,

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2{,}27159162\ ;$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0{,}6722632151.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,386343\ ;\quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,942413\ ;\quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,527589;$$
$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,323359\ ;\quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,206811\ ;\quad b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0,135616;$$
$$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 0,090412\ ;\quad b_{\frac{1}{2}}^{(7)} = 0,061101\ ;\quad b_{\frac{1}{2}}^{(8)} = 0,041731.$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 1,643709\ ;\quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 2,272414\ ;\quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 2,069770\ ;$$
$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 1,738781\ ;\quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 1,407491\ ;\quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 1,113704\ ;$$
$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{db} = 0,867147\ ;\quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{d\alpha} = 0,668830.$$

$$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 7,719923\ ,\quad \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 7,531096\ ;\quad \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 8,558595\ ;$$
$$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 9,112527\ ;\quad \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} = 9,107400\ ;\quad \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^2} = 8,634030\ ;$$
$$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^2} = 7,842733.$$

$$\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^3} = 56,55335\ ;\quad \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} = 57,35721\ ;\quad \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} = 58,19633\ ;$$
$$\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} = 62,87646\ ;\quad \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3} = 66,32409\ ;\quad \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^3} = 70,54326.$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 9,992539\ ;\quad b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 8,871894\ ;\quad b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 7,386580;$$
$$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 5,953940\ ;\quad b_{\frac{3}{2}}^{(4)} = 4,704321\ ;\quad b_{\frac{3}{2}}^{(5)} = 3,652052.$$

$$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 56,65440\ ;\quad \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 50,90290.$$

VÉNUS

VÉNUS ET MARS.

$$\alpha = \frac{a'}{a'''} = 0{,}47472320;$$

d'où l'on a conclu,

$$b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 2{,}11436649;$$

$$b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = -0{,}46094390.$$

Ensuite,

$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2{,}129668$; $b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0{,}521624$; $b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0{,}187726$;
$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0{,}074675$; $b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0{,}031127$; $b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0{,}013337$;
$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 0{,}005829$.

$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0{,}631752$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1{,}330781$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0{,}884106$;
$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0{,}510976$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 0{,}279002$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 0{,}147606$.

$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 2{,}192778$; $\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 1{,}815836$; $\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 2{,}795574$;
$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 2{,}628516$; $\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} = 2{,}004429$.

$\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^3} = 7{,}65440$; $\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} = 8{,}45655$; $\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} = 8{,}17676$;
$\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} = 10{,}66513$.

$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 3{,}523572$; $b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 2{,}304481$; $b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 1{,}325959$;
$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 0{,}722687$.

$$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 8{,}47521.$$

VÉNUS ET JUPITER.

$$\alpha = \frac{a'}{a^{\text{IV}}} = 0{,}13907116;$$

d'où l'on a conclu,

$$b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 2{,}00968215;$$

$$b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = -0{,}13873412.$$

Ensuite,

$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2{,}009778$; $b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0{,}140092$; $b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0{,}014623$;

$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0{,}001695$; $b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0{,}000206$; $b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0{,}000026$.

$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0{,}142160$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1{,}022206$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0{,}212046$;

$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0{,}036783$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 0{,}006111$.

$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 1{,}067532$; $\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 0{,}325869$; $\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 1{,}575190$;

$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 0{,}533951$.

$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 2{,}089736$; $b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 0{,}432801$; $b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 0{,}075054$.

VÉNUS ET SATURNE.

$$\alpha = \frac{a'}{a^{\text{V}}} = 0{,}07583790;$$

d'où l'on a conclu,

$$b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 2{,}00287673;$$

$$b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = -0{,}07578334.$$

Ensuite,

$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2{,}002886$; $b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0{,}076002$; $b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0{,}004323$;

$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0{,}000273$; $b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0{,}000018$.

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0{,}076331 \; ; \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1{,}006490 \; ; \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0{,}114267 \; ;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0{,}011085.$$

$$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 1{,}019629 \; ; \quad \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 0{,}172510 \; ; \quad \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 1{,}419950.$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 2{,}026116 \; ; \quad b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 0{,}229988 \; ; \quad b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 0{,}021791.$$

VÉNUS ET URANUS.

$$\alpha = \frac{a'}{a^{\text{VI}}} = 0{,}03770634 \; ;$$

d'où l'on a conclu,

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2{,}00071095 \; ;$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -\, 0{,}03769964.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2{,}000712 \; ; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0{,}037725 \; ; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0{,}001067 \; ;$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0{,}000034.$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0{,}716690 \; ; \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1{,}000829 \; ; \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0{,}056634.$$

LA TERRE ET MARS.

$$\alpha = \frac{a''}{a'''} = 0{,}65630030 \; ;$$

d'où l'on a conclu,

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2{,}22192172 \; ;$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -\, 0{,}61874262.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2{,}291132\;;\quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0{,}804563\;;\quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0{,}405584;$$
$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0{,}224598\;;\quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0{,}129973\;;\quad b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0{,}077170;$$
$$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 0{,}046595\;;\quad b_{\frac{1}{2}}^{(7)} = 0{,}028480\;;\quad b_{\frac{1}{2}}^{(8)} = 0{,}017565.$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 1{,}228078\;;\quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1{,}871211\;;\quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 1{,}601236;$$
$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 1{,}240990\;;\quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 0{,}920710\;;\quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 0{,}666207;$$
$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha} = 0{,}473942\;;\quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{d\alpha} = 0{,}333444.$$

$$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 4{,}985108\;;\quad \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 4{,}744671\;;\quad \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 5{,}731111\;;$$
$$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 6{,}057860\;;\quad \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} = 5{,}776483\;;\quad \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^2} = 5{,}141993\;;$$
$$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^2} = 4{,}388001.$$

$$\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^3} = 29{,}03400\;;\quad \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} = 29{,}78930\;;\quad \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} = 30{,}18848\;;$$
$$\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} = 33{,}29381\;;\quad \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3} = 36{,}32093\;;\quad \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^3} = 37{,}23908.$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 6{,}856336\;;\quad b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 5{,}727893\;;\quad b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 4{,}404530\;;$$
$$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 3{,}255964\;;\quad b_{\frac{3}{2}}^{(4)} = 2{,}351254\;;\quad b_{\frac{3}{2}}^{(5)} = 1{,}671668\;;$$
$$b_{\frac{3}{2}}^{(6)} = 1{,}174650.$$

$$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 31{,}80897\;;\quad \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 32{,}26285\;;\quad \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 18{,}25867.$$

LA TERRE ET JUPITER.

$$\alpha = \frac{a''}{a^{\text{IV}}} = 0{,}19226461\,;$$

d'où l'on a conclu,

$$b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 2{,}01852593\,;$$

$$b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = -0{,}19137205.$$

Ensuite,

$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2{,}018885$; $b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0{,}195003$; $b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0{,}028195$;
$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0{,}004516$; $b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0{,}000779$; $b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0{,}000132$;
$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 0{,}000023.$

$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0{,}200586$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1{,}043204$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0{,}297995$;
$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0{,}070932$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 0{,}016369$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 0{,}003448.$

$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 1{,}132355$; $\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 0{,}466165$; $\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 1{,}628667$;
$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 0{,}746681.$

$\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^3} = 1{,}472714$; $\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} = 2{,}874986$; $\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} = 1{,}418830.$

$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 2{,}176460$; $b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 0{,}619063$; $b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 0{,}148198$;
$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 0{,}032439.$

LA TERRE ET SATURNE.

$$\alpha = \frac{a''}{a^{\text{V}}} = 0{,}10484520\,;$$

d'où l'on a conclu,

$$b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 2{,}00550004\,;$$
$$b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = -\,0{,}10470094.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2{,}005535\,; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0{,}105283\,; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0{,}008282\,;$$
$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0{,}000724\,; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0{,}000066.$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0{,}106155\,; \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1{,}012536\,; \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0{,}158723\,;$$
$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0{,}020779.$$

$$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 1{,}037816\,; \quad \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 0{,}246193\,; \quad \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 1{,}526303.$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 2{,}050321\,; \quad b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 0{,}321144\,; \quad b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 0{,}041977.$$

LA TERRE ET URANUS.

$$\alpha = \frac{a''}{a^{\text{VI}}} = 0{,}05212866\,;$$

d'où l'on a conclu,

$$b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 2{,}00135893\,;$$
$$b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = -\,0{,}05211095.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2{,}001355\,; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0{,}052182\,; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0{,}002040\,;$$
$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0{,}000089.$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0{,}052288\,; \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1{,}003060\,; \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0{,}078449.$$

MARS ET JUPITER.

$$\alpha = \frac{a^{IV}}{a^{V}} = 0{,}29295212\,;$$

d'où l'on a conclu,

$$b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 2{,}04314576\,;$$

$$b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = -0{,}28977479.$$

Ensuite,

$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2{,}045112$; $b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0{,}302922$; $b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0{,}066812$;
$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0{,}016357$; $b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0{,}004192$; $b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0{,}001109$;
$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 0{,}000297$; $b_{\frac{1}{2}}^{(7)} = 0{,}000081$.

$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0{,}324004$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1{,}105998$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0{,}473717$;
$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0{,}172096$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 0{,}058420$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 0{,}019258$;
$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha} = 0{,}006173$.

$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 1{,}338759$; $\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 0{,}794557$; $\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 1{,}871538$;
$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 1{,}258858$; $\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} = 0{,}623184$.

$\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^3} = 2{,}69358$; $\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} = 3{,}77722$; $\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} = 2{,}91068$;
$\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} = 5{,}47068$.

$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 2{,}444762$; $b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 1{,}040206$; $b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 0{,}376693$;
$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 0{,}127942$.

$$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 3,48815\ ; \quad \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 4,80540\ ; \quad \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 2,99684.$$

MARS ET SATURNE.

$$\alpha = \frac{a'''}{a^{\text{v}}} = 0,15975187;$$

d'où l'on a conclu,

$$b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 2,01278081\ ;$$
$$b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = -0,15924060.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,012945\ ; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,161305\ ; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,019347\ ;$$
$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,002577\ ; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,000360\ ; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0,000052.$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0,164463\ ; \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1,029493\ ; \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0,244843\ ;$$
$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0,048740\ ; \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 0,009065.$$

$$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 1,090095\ ; \quad \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 0,379322\ ; \quad \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 1,596248;$$
$$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 0,620632.$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 2,119585\ ; \quad b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 0,503071\ ; \quad b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 0,100136.$$

MARS ET URANUS.

$$\alpha = \frac{a'''}{a^{\text{vi}}} = 0,07942807\ ;$$

d'où l'on a conclu,

$b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}$

$$b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 2,00315565 ;$$

$$b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = -0,07936538.$$

Ensuite,

$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,003167$; $b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,079617$; $b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,004746$;

$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,000314$; $b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,000022.$

$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0,079995$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1,007144$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0,119822$;

$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0,011982.$

JUPITER ET SATURNE.

$$\alpha = \frac{a^{\text{IV}}}{a^{\text{V}}} = 0,54531725 ;$$

d'où l'on a conclu,

$$b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 2,15168241 ;$$

$$b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = -0,52421272.$$

Ensuite,

$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,1802348$; $b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,6206406$; $b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,2576379$;

$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,1179750$; $b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,0565522$; $b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0,0278360$;

$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 0,0139345$; $b_{\frac{1}{2}}^{(7)} = 0,0070481$; $b_{\frac{1}{2}}^{(8)} = 0,0035837$;

$b_{\frac{1}{2}}^{(9)} = 0,0018056$; $b_{\frac{1}{2}}^{(10)} = 0,0008632$; $b_{\frac{1}{2}}^{(11)} = 0,0003223.$

$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0,808789$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1,483154$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 1,105160$;

$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0,726550$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 0,453285$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 0,274717$;

$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha} = 0,163506$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{d\alpha} = 0,096019$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(8)}}{d\alpha} = 0,056171$;

$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(9)}}{d\alpha} = 0,033083$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(10)}}{d\alpha} = 0,020265.$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 2,875229 \; ; \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 2,552788 \; ; \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 3,521040;$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 3,533622 \; ; \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} = 2,995647 \; ; \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^2} = 2,302428;$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^2} = 1,664586 \; ; \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{d\alpha^2} = 1,144377 \; ; \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(8)}}{d\alpha^2} = 0,760603;$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(9)}}{d\alpha^2} = 0,485135.$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^3} = 12,128630 \; ; \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} = 12,878804 \; ; \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} = 12,832050;$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} = 15,454850 \; ; \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 17,058155 \; ; \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^3} = 16,655445;$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^3} = 14,958762 \; ; \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{d\alpha^3} = 12,234874 \; ; \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(8)}}{d\alpha^3} = 9,566420.$$

$$\frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^4} = 84,40159 \; ; \quad \frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^4} = 83,94825 \; ; \quad \frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^4} = 87,3027 \; ;$$

$$\frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^4} = 89,8615 \; ; \quad \frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^4} = 101,3809 \; ; \quad \frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^4} = 113,5238$$

$$\frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^4} = 118,6607 \; ; \quad \frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{d\alpha^4} = 115,9588.$$

$$\frac{d^5 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^5} = 747,480 \; ; \quad \frac{d^5 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^5} = 753,417 \; ; \quad \frac{d^5 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^5} = 761,843;$$

$$\frac{d^5 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^5} = 785,884 \; ; \quad \frac{d^5 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^5} = 819,180 \; ; \quad \frac{d^5 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^5} = 884,505;$$

$$\frac{d^5 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^5} = 912,301.$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 4,358387 \; ; \quad b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 3,185493 \; ; \quad b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 2,082131;$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 1,295672 \; ; \quad b_{\frac{3}{2}}^{(4)} = 0,784084 \; ; \quad b_{\frac{3}{2}}^{(5)} = 0,466047;$$

$b_{\frac{3}{2}}^{(6)} = 0{,}273629$; $b_{\frac{3}{2}}^{(7)} = 0{,}158799$; $b_{\frac{3}{2}}^{(8)} = 0{,}092290$;
$b_{\frac{3}{2}}^{(9)} = 0{,}053922$.

$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 14{,}681324$; $\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 15{,}239657$; $\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 13{,}416026$;
$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 10{,}598611$; $\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 7{,}802247$; $\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 5{,}470398$;
$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{d\alpha} = 3{,}710043$; $\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(7)}}{d\alpha} = 2{,}426079$; $\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(8)}}{d\alpha} = 1{,}563695$.

$\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 96{,}68536$; $\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 94{,}91701$; $\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 93{,}19282$;
$\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 86{,}90215$; $\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} = 75{,}08115$; $\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{d\alpha^2} = 61{,}10155$;
$\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{d\alpha^2} = 47{,}48185$; $\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(7)}}{d\alpha^2} = 35{,}74355$.

$\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(0)}}{d\alpha^3} = 830{,}0586$; $\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} = 830{,}1580$; $\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} = 810{,}1045$;
$\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} = 785{,}5855$; $\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3} = 740{,}6775$; $\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{d\alpha^3} = 666{,}4080$;
$\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{d\alpha^3} = 574{,}9115$.

JUPITER ET URANUS.

$$\alpha = \frac{a^{\text{IV}}}{a^{\text{VI}}} = 0{,}27112980\,;$$

d'où l'on a conclu,

$$b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 2{,}03692776\,;$$
$$b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = -\,0{,}26861497.$$

Ensuite,

$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2{,}038359$; $b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0{,}278966$; $b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0{,}056906$;
$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0{,}012879$; $b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0{,}003058$; $b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0{,}000745$;
$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 0{,}000185$.

$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0{,}295410$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1{,}089551$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0{,}433630$;
$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0{,}145398$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 0{,}045930$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 0{,}015410$.

$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 1{,}283434$; $\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 0{,}714932$; $\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 1{,}815451$;
$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 1{,}133359$.

$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 2{,}372983$; $b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 0{,}938794$; $b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 0{,}315186$;
$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 0{,}099260$.

SATURNE ET URANUS.

$$\alpha = \frac{a^{v}}{a^{vi}} = 0{,}49719638;$$

d'où l'on a conclu,

$$b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 2{,}12564287;$$
$$b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = -0{,}48131675.$$

Ensuite,

$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2{,}144440$; $b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0{,}552007$; $b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0{,}208313$;
$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0{,}086834$; $b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0{,}037909$; $b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0{,}016990$;
$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 0{,}007728$; $b_{\frac{1}{2}}^{(7)} = 0{,}003522$; $b_{\frac{1}{2}}^{(8)} = 0{,}001547$.

$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0{,}683055$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1{,}373806$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0{,}949128$;

$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0{,}572896$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 0{,}327198$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 0{,}181370$;

$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha} = 0{,}098799$; $\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{d\alpha} = 0{,}053642$.

$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 3{,}377102$; $\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 2{,}017767$; $\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 2{,}992245$;

$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 2{,}881218$; $\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} = 2{,}278077$; $\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^2} = 1{,}616470$;

$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^2} = 1{,}067430$.

$\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^3} = 8{,}798999$; $\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} = 9{,}578267$; $\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} = 9{,}425450$;

$\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} = 11{,}904140$; $\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3} = 12{,}988670$; $\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^3} = 12{,}135721$.

$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 3{,}750905$; $b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 2{,}547992$; $b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 1{,}530452$;

$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 0{,}872105$; $b_{\frac{3}{2}}^{(4)} = 0{,}482564$; $b_{\frac{3}{2}}^{(5)} = 0{,}262146$.

$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 9{,}75656$; $\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 7{,}24097$; $\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 4{,}95052$.

CHAPITRE VII.

Expressions numériques des variations séculaires des élémens des orbites planétaires.

24. Nous allons présentement donner les valeurs numériques des variations séculaires des élémens des orbites planétaires. Reprenons pour cela les variations différentielles des excentricités, des périhélies, des inclinaisons et des nœuds des orbites, données dans les n°s 58 et 60 du second livre. Pour les réduire en nombre, il faut d'abord déterminer les valeurs numériques des quantités $(0,1)$, $\boxed{0,1}$, &c. On a d'abord calculé les valeurs de $(0,1)$ et $\boxed{0,1}$, au moyen des formules suivantes données dans le n°. 55 du second livre,

$$(0,1) = -\frac{3m'n.\alpha^2.b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{4.(1-\alpha^2)^2};$$

$$\boxed{0,1} = -\frac{3m'.n\alpha.\{(1+\alpha^2).b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\alpha.b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}\}}{2.(1-\alpha^2)^2}.$$

On en a conclu les valeurs de $(1,0)$ et $\boxed{1,0}$, au moyen des équations suivantes trouvées dans le même n°.

$$(1,0) = \frac{m.\sqrt{a}}{m'.\sqrt{a'}}.(0,1)\ ; \qquad \boxed{1,0} = \frac{m.\sqrt{a}}{m'.\sqrt{a'}}.\boxed{0,1}.$$

On a obtenu de cette manière les résultats suivans réduits en secondes, et dans lesquels les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 se rapportent respectivement à Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus. On a multiplié les masses précédentes des planètes, respectivement par les facteurs indéterminés $1+\mu$, $1+\mu'$, $1+\mu''$, &c., afin de pouvoir corriger immédiatement ces résultats, quand on aura les corrections des masses.

$$(0,1) = (1+\mu').9'',421152\ ; \quad \boxed{0,1} = (1+\mu').6'',053725\ ;$$
$$(0,2) = (1+\mu'').2'',974746\ ; \quad \boxed{0,2} = (1+\mu'').1'',411096\ ;$$

$(0,3) = (1+\mu''').0'',125403$; $\boxed{0,3} = (1+\mu''').0'',039496$;
$(0,4) = (1+\mu^{IV}).4'',862570$; $\boxed{0,4} = (1+\mu^{IV}).0'',451633$;
$(0,5) = (1+\mu^{V}).0'',248641$; $\boxed{0,5} = (1+\mu^{V}).0'',012610$;
$(0,6) = (1+\mu^{VI}).0'',005252$; $\boxed{0,6} = (1+\mu^{VI}).0'',000129$.

$(1,0) = (1+\mu).1'',303450$; $\boxed{1,0} = (1+\mu).0'',837553$;
$(1,2) = (1+\mu'').22'',889753$; $\boxed{1,2} = (1+\mu'').19'',058562$;
$(1,3) = (1+\mu''').0'',457288$; $\boxed{1,3} = (1+\mu''').0'',263124$;
$(1,4) = (1+\mu^{IV}).12'',750512$; $\boxed{1,4} = (1+\mu^{IV}).2'',211195$;
$(1,5) = (1+\mu^{V}).0'',640032$; $\boxed{1,5} = (1+\mu^{V}).0'',060621$;
$(1,6) = (1+\mu^{VI}).0'',013439$; $\boxed{1,6} = (1+\mu^{VI}).0'',000634$.

$(2,0) = (1+\mu).0'',301154$; $\boxed{2,0} = (1+\mu).0'',142855$;
$(2,1) = (1+\mu').16'',749060$; $\boxed{2,1} = (1+\mu').13'',945671$;
$(2,3) = (1+\mu''').1'',336417$; $\boxed{2,3} = (1+\mu''').1'',027656$;
$(2,4) = (1+\mu^{IV}).21'',444015$; $\boxed{2,4} = (1+\mu^{IV}).5'',129740$;
$(2,5) = (1+\mu^{V}).1'',050745$; $\boxed{2,5} = (1+\mu^{V}).0'',137390$;
$(2,6) = (1+\mu^{VI}).0'',021899$; $\boxed{2,6} = (1+\mu^{VI}).0'',001428$.

$(3,0) = (1+\mu).0'',057600$; $\boxed{3,0} = (1+\mu).0'',018142$;
$(3,1) = (1+\mu').1'',518147$; $\boxed{3,1} = (1+\mu').0'',873545$;
$(3,2) = (1+\mu'').6'',063413$; $\boxed{3,2} = (1+\mu'').4'',662522$;
$(3,4) = (1+\mu^{IV}).44'',479510$; $\boxed{3,4} = (1+\mu^{IV}).16'',108309$;
$(3,5) = (1+\mu^{V}).2'',031918$; $\boxed{3,5} = (1+\mu^{V}).0'',404446$;
$(3,6) = (1+\mu^{VI}).0'',041468$; $\boxed{3,6} = (1+\mu^{VI}).0'',004114$.

$(4,0) = (1+\mu).0'',000699$; $\boxed{4,0} = (1+\mu).0'',000065$;
$(4,1) = (1+\mu').0'',013244$; $\boxed{4,1} = (1+\mu').0'',002297$;
$(4,2) = (1+\mu'').0'',030439$; $\boxed{4,2} = (1+\mu'').0'',007281$;
$(4,3) = (1+\mu''').0'',013916$; $\boxed{4,3} = (1+\mu''').0'',005040$;
$(4,5) = (1+\mu^{V}).23'',771411$; $\boxed{4,5} = (1+\mu^{V}).15'',537640$;
$(4,6) = (1+\mu^{VI}).0'',298294$; $\boxed{4,6} = (1+\mu^{VI}).0'',100143$.

$(5,0) = (1+\mu).0'',000083$; $\boxed{5,0} = (1+\mu).0'',000004$;
$(5,1) = (1+\mu').0'',001545$; $\boxed{5,1} = (1+\mu').0'',000146$;
$(5,2) = (1+\mu'').0'',003467$; $\boxed{5,2} = (1+\mu'').0'',000454$;

$(5,3) = (1+\mu''').\ 0'',001478$; $\boxed{5,3} = (1+\mu''').\ 0'',000294$;
$(5,4) = (1+\mu^{\text{iv}}).\ 55'',263722$; $\boxed{5,4} = (1+\mu^{\text{iv}}).\ 36'',121899$;
$(5,6) = (1+\mu^{\text{vi}}).\ 1'',096340$; $\boxed{5,6} = (1+\mu^{\text{vi}}).\ 0'',658505$.

$(6,0) = (1+\mu\ ).0'',000007$; $\boxed{6,0} = (1+\mu\ ).0'',000000$;
$(6,1) = (1+\mu'\ ).0'',000133$; $\boxed{6,1} = (1+\mu'\ ).0'',000007$;
$(6,2) = (1+\mu''\ ).0'',000296$; $\boxed{6,2} = (1+\mu''\ ).0'',000019$;
$(6,3) = (1+\mu''').0'',000124$; $\boxed{6,3} = (1+\mu''').0'',000012$;
$(6,4) = (1+\mu^{\text{iv}}).2'',838932$; $\boxed{6,4} = (1+\mu^{\text{iv}}).0'',953096$;
$(6,5) = (1=\mu^{\text{v}}\ ).4'',488196$; $\boxed{6,5} = (1+\mu^{\text{v}}\ ).2'',695783$.

26. Au moyen de ces valeurs et des formules données dans les nos 58 et 60 du second livre, on a conclu les résultats suivans, dans lesquels $\frac{d\varpi}{dt}$ exprime le mouvement sydéral du périhélie en longitude, à l'époque de 1750, et pendant une année de $365^{\text{jours}}\frac{1}{4}$; $\frac{2.de}{dt}$ est la variation annuelle de l'équation du centre, ou du double de l'excentricité, à la même époque; $\frac{d\phi}{dt}$ est la variation annuelle de l'inclinaison de l'orbite, à l'écliptique fixe de 1750; $\frac{d\phi_{,}}{dt}$ est la variation annuelle de l'inclinaison de l'orbite, à l'écliptique vraie; $\frac{d\theta}{dt}$ est le mouvement annuel et sydéral du nœud ascendant de l'orbite sur l'écliptique fixe de 1750; $\frac{d\theta_{,}}{dt}$ est le mouvement annuel et sydéral du même nœud sur l'écliptique vraie.

MERCURE.

$$\frac{d\varpi}{dt} = 17'',367383 + 9'',302569.\mu' + 2'',870161.\mu'' + 0'',129151.\mu''' + 4'',814947.\mu^{\text{iv}} + 0,245303.\mu^{\text{v}} + 0'',005252.\mu^{\text{vi}}.$$

$$2.\frac{de}{dt} = 0'',042252 + 0'',067742.\mu' + 0'',020096.\mu'' - 0'',007190.\mu''' - 0'',038766.\mu^{\text{iv}} + 0'',000358.\mu^{\text{v}} + 0'',000012.\mu^{\text{vi}}.$$

$\frac{d\phi}{dt}$

$$\frac{d\phi}{dt} = -0'',370349 - 0'',271453.\mu' - 0'',000162.\mu''' - 0'',088777.\mu^{\text{iv}} - 0'',009924.\mu^{\text{v}} - 0'',000033.\mu^{\text{vi}}.$$

$$\frac{d\phi_{,}}{dt} = 0'',547557 + 0'',211140.\mu' + 0'',001569.\mu''' + 0'',302730.\mu^{\text{iv}} + 0'',032015.\mu^{\text{v}} + 0'',000103.\mu^{\text{vi}}.$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -13'',040106 - 5'',446264.\mu' - 2'',974745.\mu'' - 0'',092442.\mu''' - 4'',308989.\mu^{\text{iv}} - 0'',212929.\mu^{\text{v}} - 0'',004737.\mu^{\text{vi}}.$$

$$\frac{d\theta_{,}}{dt} = -23'',354327 - 0'',301154.\mu - 12'',513661.\mu' - 2'',974745.\mu'' - 0'',443748.\mu''' - 6'',750288.\mu^{\text{iv}} - 0'',363854.\mu^{\text{v}} - 0'',006877.\mu^{\text{vi}}.$$

VÉNUS.

$$\frac{d\varpi^{\text{v}}}{dt} = -7'',231874 - 13'',318446.\mu - 17'',761229.\mu'' + 3'',715362.\mu''' + 19'',863664.\mu^{\text{iv}} + 0'',258684.\mu^{\text{v}} + 0'',010091.\mu^{\text{vi}}.$$

$$2.\frac{de'}{dt} = -0'',804218 - 0'',279256.\mu - 0'',312252.\mu'' - 0'',019686.\mu''' - 0'',188714.\mu^{\text{iv}} - 0'',004348.\mu^{\text{v}} + 0'',000038.\mu^{\text{vi}}.$$

$$\frac{d\phi'}{dt} = -0'',049228 + 0'',077777.\mu + 0'',006658.\mu''' - 0'',116834.\mu^{\text{iv}} - 0'',016835.\mu^{\text{v}} + 0'',000006.\mu^{\text{vi}}.$$

$$\frac{d\phi'_{,}}{dt} = 0'',137464 + 0'',059807.\mu - 0'',012801.\mu''' + 0'',079659.\mu^{\text{iv}} + 0'',010803.\mu^{\text{v}} - 0,000004.\mu^{\text{vi}}.$$

$$\frac{d\theta'}{dt} = -30'',558630 + 1'',055720.\mu - 22'',889753.\mu'' - 0'',234914.\mu''' - 8'',215138.\mu^{\text{iv}} - 0'',264164.\mu^{\text{v}} - 0'',010381.\mu^{\text{vi}}.$$

$$\frac{d\theta'_{,}}{dt} = -56'',752351 + 0'',510648.\mu - 16'',749053.\mu' - 22'',889753.\mu'' - 0'',884798.\mu''' - 15'',842800.\mu^{\text{iv}} - 0'',881230.\mu^{\text{v}} - 0,015365.\mu^{\text{vi}}.$$

LA TERRE.

$$\frac{d\varpi''}{dt} = 36'',881443 - 1'',280628.\mu + 11'',769371.\mu' + 4'',772107.\mu''' + 21'',001210.\mu^{\text{iv}} + 0'',598970.\mu^{\text{v}} + 0'',020413.\mu^{\text{v}}$$

$$2.\frac{de''}{dt} = -0'',579130 - 0'',024866.\mu + 0'',093936.\mu' - 0'',152500.\mu'''$$
$$- 0'',493018.\mu^{\text{iv}} - 0'',002806.\mu^{\text{v}} + 0'',000124.\mu^{\text{vi}}.$$

MARS.

$$\frac{d\varpi'''}{dt} = 48'',386296 + 0'',049209.\mu + 1'',577303.\mu' + 6'',571974.\mu''$$
$$+ 38'',002750.\mu^{\text{iv}} + 2'',141598.\mu^{\text{v}} + 0'',043462.\mu^{\text{vi}}.$$

$$2.\frac{de'''}{dt} = 1'',149806 + 0'',007292.\mu + 0'',004832.\mu' + 0'',124976.\mu''$$
$$+ 0'',972168.\mu^{\text{iv}} + 0'',040638.\mu^{\text{v}} - 0''000100.\mu^{\text{vi}}.$$

$$\frac{d\varphi'''}{dt} = -0'',906791 + 0'',000284.\mu - 0'',040575.\mu' - 0'',786665.\mu^{\text{iv}}$$
$$- 0'',079599.\mu^{\text{v}} - 0'',000236.\mu^{\text{vi}}.$$

$$\frac{d\varphi_{,}'''}{dt} = -0'',040074 - 0'',001199.\mu + 0'',407078.\mu' - 0'',407404.\mu^{\text{iv}}$$
$$- 0'',038437.\mu^{\text{v}} - 0'',000112.\mu^{\text{vi}}.$$

$$\frac{d\theta'''}{dt} = -30'',025415 + 0'',161185.\mu + 0'',969343.\mu' - 6'',063413.\mu''$$
$$- 24'',244144.\mu^{\text{iv}} - 0'',822630.\mu^{\text{v}} - 0'',025756.\mu^{\text{vi}},$$

$$\frac{d\theta_{,}'''}{dt} = -70'',338499 - 0'',982701.\mu - 26'',474072.\mu' - 6'',063413.\mu''$$
$$- 1'',336417.\mu''' - 33'',999862.\mu^{\text{iv}} - 1'',447980.\mu^{\text{v}}$$
$$- 0'',034054.\mu^{\text{vi}}.$$

JUPITER.

$$\frac{d\varpi^{\text{iv}}}{dt} = 20'',369659 + 0'',000574.\mu + 0'',013364.\mu' + 0'',030362.\mu''$$
$$+ 0'',006319.\mu''' + 19'',931701.\mu^{\text{v}} + 0'',387339.\mu^{\text{vi}}.$$

$$2.\frac{de^{\text{iv}}}{dt} = 1'',711168 - 0'',000024.\mu + 0'',000028.\mu' + 0'',000244.\mu''$$
$$- 0'',000588.\mu'' + 1'',707742.\mu^{\text{v}} + 0'',003766.\mu^{\text{vi}}.$$

$$\frac{d\iota^{\text{iv}}}{dt} = -0'',241174 + 0'',000068.\mu + 0'',000313.\mu' + 0'',000346.\mu'''$$
$$- 0'',243621.\mu^{\text{v}} + 0'',001720.\mu^{\text{vi}}.$$

$$\frac{d\varphi_{,}^{\text{iv}}}{dt} = -0'',688820 - 0'',029292.\mu - 0'',395414.\mu' - 0'',032856.\mu'''$$
$$- 0'',232852.\mu^{\text{v}} + 0'',001594.\mu^{\text{vi}}.$$

$$\frac{d\theta^{\text{iv}}}{dt} = 19'',926792 + 0'',001570.\mu + 0'',018076.\mu' - 0'',030439.\mu'' - 0,001423.\mu''' + 20'',078923.\mu^{\text{v}} - 0'',139915.\mu^{\text{vi}}.$$

$$\frac{d\theta_{,}^{\text{iv}}}{dt} = -45'',257336 - 0'',976008.\mu - 39'',594863.\mu' - 0'',030439.\mu'' - 1'',201089.\mu''' - 21'',444015.\mu^{\text{iv}} + 18'',140621.\mu^{\text{v}} - 0'',151543.\mu^{\text{vi}}.$$

SATURNE.

$$\frac{d\varpi^{\text{v}}}{dt} = 49'',730637 + 0'',000068.\mu + 0''001531.\mu' + 0'',003334.\mu'' + 0'',001697.\mu''' + 48'',737068.\mu^{\text{iv}} + 0'',986939.\mu^{\text{vi}}.$$

$$2.\frac{de^{\text{v}}}{dt} = -3'',334597 - 0''000000.\mu + 0'',000001.\mu' + 0'',000002.\mu'' - 0'',000048.\mu''' - 3'',394812.\mu^{\text{iv}} + 0''060260.\mu^{\text{vi}}.$$

$$\frac{d\phi^{\text{v}}}{dt} = 0'',307841 + 0'',000009.\mu + 0'',000055.\mu' + 0'',000043.\mu''' + 0'',298443.\mu^{\text{iv}} + 0'',009291.\mu^{\text{vi}}.$$

$$\frac{d\phi_{,}^{\text{v}}}{dt} = -0'',479290 - 0'',033813.\mu - 0'',598513.\mu' - 0'',038709.\mu''' + 0'',182639.\mu^{\text{iv}} + 0'',009106.\mu^{\text{vi}}.$$

$$\frac{d\theta^{\text{v}}}{dt} = -27'',794110 + 0'',000011.\mu + 0'',000130.\mu' - 0'',003467.\mu'' - 0'',000996.\mu''' - 26'',957559.\mu^{\text{iv}} - 0'',832229.\mu^{\text{vi}}.$$

$$\frac{d\theta_{,}^{\text{v}}}{dt} = -58'',770060 - 0'',342473.\mu - 18'',158175.\mu' - 0'',003467.\mu'' - 0'',436463.\mu''' - 37'',941234.\mu^{\text{iv}} - 1'',050744.\mu^{\text{v}} - 0'',837504.\mu^{\text{vi}}.$$

URANUS.

$$\frac{d\varpi^{\text{vi}}}{dt} = 7'',576700 + 0'',000008.\mu + 0'',000132.\mu' + 0'',000293.\mu'' + 0'',000147.\mu''' + 3'',737130.\mu^{\text{iv}} + 3'',838990.\mu^{\text{v}}.$$

$$2.\frac{de^{\text{vi}}}{dt} = -0'',333901 - 0'',000000.\mu - 0'',000000.\mu' - 0'',000000.\mu'' + 0'',000001.\mu''' - 0'',036890.\mu^{\text{iv}} - 0'',297012.\mu^{\text{v}}.$$

$$\frac{d\phi^{\text{vi}}}{dt} = -0'',150807 + 0'',000000.\mu + 0'',000000.\mu' + 0'',000001.\mu''' - 0'',027888.\mu^{\text{iv}} - 0'',122920.\mu^{\text{v}}.$$

$$\frac{d\varphi_{,}^{\text{vi}}}{dt} = -0'',084754 - 0'',016951.\mu + 0'',031312.\mu' - 0'',018232\,\mu''' + 0'',182767.\mu^{\text{iv}} - 0'',094142.\mu^{\text{v}}.$$

$$\frac{d\theta^{\text{vi}}}{dt} = 8'',336037 + 0'',000051.\mu + 0'',000450.\mu' - 0'',000296.\mu'' + 0'',000144.\mu''' + 1'',532043.\mu^{\text{iv}} + 6'',803645.\mu^{\text{v}}.$$

$$\frac{d\theta_{,}^{\text{vi}}}{dt} = -106'',183322 - 2'',433693.\mu - 73'',505817.\mu' - 0'',000296.\mu'' - 2'',897429.\mu''' - 31'',484265.\mu^{\text{iv}} + 4'',160079.\mu^{\text{v}} - 0'',021901.\mu^{\text{vi}}.$$

Je n'ai point compris dans les formules précédentes, les variations de l'orbe terrestre; on les déterminera par les équations,

$$\text{tang.}\,\varphi''.\sin.\theta'' = p''\ ; \quad \text{tang.}\,\varphi''.\cos.\theta'' = q''.$$

Quant aux valeurs de p'' et de q'', on les déterminera par les formules du n°. 59 du second livre, et l'on aura, en prenant pour plan fixe l'écliptique de 1750;

$$p'' = t.\frac{dp''}{dt} + \frac{t^2}{2}.\frac{ddp''}{dt^2} + \&c.;$$

$$q'' = t.\frac{dq''}{dt} + \frac{t^2}{2}.\frac{ddq''}{dt^2} + \&c.;$$

t exprimant le nombre des années juliennes écoulées depuis 1750, et les valeurs de $\frac{dp'}{dt}$, $\frac{dq''}{dt}$, $\frac{ddp''}{dt^2}$, &c. se rapportant à cette époque. On pourra ne considérer que la première puissance de t dans ces deux séries, lorsque t n'excédera pas 300; et lorsqu'il ne surpassera pas 1000 ou 1200, on pourra rejeter les puissances supérieures au carré, ce qui est permis, même relativement aux observations les plus anciennes, vu leur imperfection. On trouve par les formules citées,

$$\frac{dp''}{dt} = 0'',236792 + 0'',025989.\mu + 0'',266408.\mu' + 0'',029082.\mu''' - 0'',067966.\mu^{\text{iv}} - 0'',016809.\mu^{\text{v}} + 0'',000088.\mu^{\text{vi}}.$$

$$\frac{dq''}{dt} = -1'',546156 - 0'',026304.\mu - 0'',956638.\mu' - 0'',031898.\mu''' - 0'',488376\,\mu^{\text{iv}} - 0'',042658.\mu^{\text{v}} - 0'',000282.\mu^{\text{vi}}.$$

26. On a vu dans le chapitre III, que l'ellipticité du soleil produit dans les périhélies des orbes planétaires un léger mouvement égal à

$$(\rho - \tfrac{1}{2} q) \cdot \frac{D^2}{a^2} \cdot nt.$$

Considérons ce mouvement par rapport à Mercure. q est le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur solaire : soit mt le mouvement angulaire de rotation du soleil ; la force centrifuge à l'équateur solaire, sera $m^2 \cdot D$. Si l'on exprime par S la masse du soleil, on aura $\frac{S}{a''^3} = n''^2$, ou $S = n''^2 \cdot a''^3$; ce qui donne la pesanteur $\frac{S}{D^2}$ à l'équateur solaire, égale à $\frac{n''^2 \cdot a''^3}{D^2}$; on a donc

$$q = \frac{m^2}{n''^2} \cdot \frac{D^3}{a''^3}.$$

La durée de la rotation du soleil est, suivant les observations, à très-peu près égale à 25^{jours},417. La durée de la révolution sydérale de la terre est de 365^{jours},256; d'où l'on tire

$$\frac{m}{n''} = \frac{365{,}256}{25{,}417}.$$

Le demi-diamètre apparent du soleil dans sa moyenne distance, est de 2968''; ce qui donne

$$\frac{D}{a''} = \sin. 2968'' ;$$

on a donc

$$q = 0{,}0000209268.$$

Dans le cas de l'homogénéité du soleil, on a par le n°. 24 du troisième livre, $\rho = \frac{1}{4} \cdot q$; le mouvement du périhélie de Mercure, produit par l'ellipticité du soleil, est donc alors égal à

$$\tfrac{3}{4} q \cdot \frac{D^2}{a^2} \cdot nt,$$

et par conséquent à

$$\tfrac{3}{4} q \cdot (\sin. 2968'')^2 \cdot \left(\frac{a''}{a}\right)^2 \cdot nt.$$

En substituant pour a, a'', et n, leurs valeurs données dans le chapitre V; cette quantité devient, 0'',037810$\cdot t$. Elle augmente la

valeur précédente de $\frac{d\varpi}{dt}$, de la quantité 0",037810. Cette quantité presque insensible devient plus petite encore, si, comme il y a tout lieu de le croire, le soleil est formé de couches dont la densité croît de la surface au centre; on peut donc la négliger pour Mercure, et à plus forte raison, pour les autres planètes. Les variations des nœuds et des inclinaisons des orbites, dépendantes de la même cause, peuvent être également négligées.

CHAPITRE VIII.

Théorie de Mercure.

27. Les inégalités de toutes les planètes, indépendantes des excentricités, et celles qui ne dépendent que de leurs premières puissances, ont été calculées par les formules du nº 50 du second livre. On a d'abord déterminé les valeurs de $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, &c., et de leurs différences, par les formules du nº. 49 du même livre; ensuite on a obtenu les résultats suivans dans lesquels j'ai omis les perturbations du rayon vecteur, dont l'effet sur la longitude géocentrique de la planète est au-dessous d'une seconde. Pour déterminer la limite qu'une inégalité du rayon vecteur, doit atteindre pour produire une seconde sur la longitude géocentrique de Mercure, nous observerons que si l'on nomme V cette longitude, et si l'on fait $\frac{r}{r''}=\alpha$; on a pour la variation δV correspondante à δr,

$$\delta V = -\frac{\delta r}{r''} \cdot \frac{\sin.(v-v'')}{1-2\alpha.\cos.(v-v'')+\alpha^2}.$$

Le *maximum* de la fonction

$$\frac{\sin.(v-v'')}{1-2\alpha.\cos.(v-v'')+\alpha^2}$$

correspond à

$$\cos.(v-v'')=\frac{2\alpha}{1+\alpha^2};$$

ce qui donne $\frac{1}{1-\alpha^2}$ pour ce *maximum;* on a donc alors

$$\delta r = -r''.(1-\alpha^2).\delta V.$$

Si l'on suppose $\delta V = \pm 1''$, et si l'on prend pour r et r'', les moyennes distances de Mercure et de la Terre au Soleil, on aura par ce qui précède, $r''=1$; $\alpha = 0{,}38709812$; d'où l'on tire,

$$\delta r = \mp 0{,}000001335;$$

on peut donc négliger toutes les inégalités du rayon vecteur de Mercure, dont le coëfficient est au-dessous de $\pm 0{,}000001$. Parmi

les inégalités du mouvement en longitude, nous ne rapporterons que celles dont le coëfficient est au-dessous d'un quart de seconde, excepté les inégalités qui dépendent de la simple distance angulaire de la planète, et qui peuvent être réduites dans une même table avec des inégalités plus considérables.

Inégalités de Mercure, indépendantes des excentricités.

$$\delta v = (1+\mu').\left\{\begin{array}{l} 2'',044299.\sin.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon) \\ -4'',497255.\sin.2.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon) \\ -0'',395294.\sin.3.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon) \\ -0'',090322.\sin.4.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon) \\ -0'',027485.\sin.5.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon) \end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu'').\left\{\begin{array}{l} 0'',622493.\sin.(n''t-nt+\varepsilon''-\varepsilon) \\ -0'',511250.\sin.2.(n''t-nt+\varepsilon''-\varepsilon) \\ -0'',052163.\sin.3.(n''t-nt+\varepsilon''-\varepsilon) \\ -0'',009652.\sin.4.(n''t-nt+\varepsilon''-\varepsilon) \end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{\text{IV}}).\left\{\begin{array}{l} 1'',757209.\sin.(n^{\text{IV}}t-nt+\varepsilon^{\text{IV}}-\varepsilon) \\ -0'',365384.\sin.2.(n^{\text{IV}}t-nt+\varepsilon^{\text{IV}}-\varepsilon) \\ -0'',009624.\sin.3.(n^{\text{IV}}t-nt+\varepsilon^{\text{IV}}-\varepsilon) \end{array}\right\};$$

$$\delta r = -(1+\mu').\left\{\begin{array}{l} 0,0000000376 \\ -0,0000004094.\cos.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon) \\ +0,0000015545.\cos.2.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon) \\ +0,0000001702.\cos.3.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon) \\ +0,0000000437.\cos.4.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon) \end{array}\right\}.$$

Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.

$$\delta v = (1+\mu').\left\{\begin{array}{l} 0'',911114.\sin.(n't+\varepsilon'-\varpi) \\ -12'',440900.\sin.(2n't-nt+2\varepsilon'-\varepsilon-\varpi) \\ -5'',204241.\sin.(3n't-2nt+3\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi) \\ +0'',290090.\sin.(3n't-2nt+3\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi') \\ +0'',907384.\sin.(4n't-3nt+4\varepsilon'-3\varepsilon-\varpi) \\ -0'',545742.\sin.(2nt-n't+2\varepsilon-\varepsilon'-\varpi) \\ +1'',217550.\sin.(3nt-2n't+3\varepsilon-2\varepsilon'-\varpi) \end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu'').$$

$$+(1+\mu'').\left\{\begin{array}{l} 0'',294499.\sin.(n''t+\varepsilon''-\varpi) \\ -1'',425025.\sin.(2n''t-nt+2\varepsilon''-\varepsilon-\varpi) \\ +0'',753543.\sin.(3n''t-2nt+3\varepsilon''-2\varepsilon-\varpi) \end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{\text{iv}}).\left\{\begin{array}{l} 0'',729463.\sin.(n^{\text{iv}}t+\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi) \\ -1'',765962.\sin.(n^{\text{iv}}t+\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi^{\text{iv}}) \\ -10'',119405.\sin.(2n^{\text{iv}}t-nt+2\varepsilon^{\text{iv}}-\varepsilon-\varpi) \end{array}\right\}$$

$$-(1+\mu^{\text{v}}).\left\{\begin{array}{l} 0'',259774.\sin.(n^{\text{v}}t+\varepsilon^{\text{v}}-\varpi^{\text{v}}) \\ +1'',220658.\sin.(2n^{\text{v}}t-nt+2\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon-\varpi) \end{array}\right\}.$$

$$\delta r = -(1+\mu').0,0000013482.\cos.(3n't-2nt+3\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi)$$
$$-(1+\mu^{\text{iv}}).0,0000029625.\cos.(2n^{\text{iv}}t-nt+2\varepsilon^{\text{iv}}-\varepsilon-\varpi).$$

Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites.

Ces inégalités ont été calculées par les formules des n°s. 1, 2 et 4. Le double du mouvement de Mercure diffère très-peu de cinq fois le mouvement de Vénus ; en sorte que $5.(n'-n)+2n$ est à très-peu-près égal à $-n$; il faut donc par le n° 3, considérer l'inégalité dépendante de $3nt-5n't$. L'angle $3n't-nt$, croît avec assez de lenteur, pour avoir égard à l'inégalité qui en dépend. Pareillement, le mouvement de Mercure étant égal à très-peu-près à quatre fois celui de la terre, $4.(n''-n)+2n$ diffère peu de $-n$; il faut donc par le n° 3, considérer l'inégalité dépendante de $2nt-4n''t$. On trouve ainsi,

$$\delta v = -(1+\mu').\left\{\begin{array}{l} 5'',217417.\sin.(3nt-5n't+3\varepsilon-5\varepsilon'-48°,1210) \\ +1'',844641.\sin.(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon+45°,1219) \end{array}\right\}$$
$$-(1+\mu'').0'',813190.\sin.(2nt-4n''t+2\varepsilon-4\varepsilon''-45°,7735);$$

$$\delta r = (1+\mu').0,0000016056.\cos.(3nt-5n't+3\varepsilon-5\varepsilon'-47°,7420).$$

Inégalités dépendantes des cubes et des produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites.

La première de ces inégalités dépend de l'angle $3nt-5n't$; elle a été calculée par les formules du n°. 7. La seconde dépend de

l'angle $nt - 4n't$; elle a été calculée suivant la méthode du n°. 10. On a trouvé ainsi,

$$\delta v = -(1+\mu').26'',184460.\sin.(2nt - 5n't + 2\varepsilon - 5\varepsilon' + 33°,5852)$$
$$-(1+\mu'').2'',131517.\sin.(nt - 4n''t + \varepsilon - 4\varepsilon'' + 21°,1522).$$

Les inégalités du mouvement de Mercure en latitude, ont été calculées par les formules du n°. 51 du second livre. Comme elles sont insensibles, et au-dessous d'un quart de seconde, je crois inutile de les rapporter ici.

CHAPITRE IX.

Théorie de Vénus.

28. Si l'on fait $\frac{r'}{r''} = \alpha$, et si l'on nomme V' la longitude géocentrique de Vénus, l'équation

$$\delta r = -r''.(1-\alpha^2).\delta V$$

donnée dans le n°. précédent, deviendra, relativement à cette planète,

$$\delta r' = -r''.(1-\alpha^2).\delta V'.$$

En prenant pour r' et r'' les moyennes distances de Vénus et de la Terre au Soleil, on a par le n°. 23, $\alpha = 0{,}72333230$; en faisant donc $\delta V' = \pm 1''$, on aura

$$\delta r' = \mp 0{,}0000007489.$$

On peut ainsi négliger les inégalités du rayon vecteur, dont le coëfficient est au-dessous de 0'',0000007. Nous négligerons les inégalités du mouvement en longitude, au-dessous d'un quart de seconde.

Inégalités de Vénus indépendantes des excentricités.

$$\delta v' = (1+\mu'').\left\{\begin{array}{l}
15'',481270.\sin.(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \\
+35'',260470.\sin.2.(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \\
-22'',388478.\sin.3.(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \\
-\ 3'',261481.\sin.4.(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \\
-\ 1'',067587.\sin.5.(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \\
-\ 0'',448709.\sin.6.(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \\
-\ 0'',215203.\sin.7.(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \\
-\ 0'',111751.\sin.8.(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon')
\end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu''').\left\{\begin{array}{l}
0'',246629.\sin.(n'''t - n't + \varepsilon''' - \varepsilon') \\
-0'',327119.\sin.2.(n'''t - n't + \varepsilon''' - \varepsilon') \\
-0'',033497.\sin.3.(n'''t - n't + \varepsilon''' - \varepsilon') \\
-0'',007196.\sin.4.(n'''t - n't + \varepsilon''' - \varepsilon')
\end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{\text{iv}}).\left\{\begin{array}{l} 8'',923260.\sin.(n^{\text{iv}}t-n't+\varepsilon^{\text{iv}}-\varepsilon') \\ -2'',708716.\sin.2.(n^{\text{iv}}t-n't+\varepsilon^{\text{iv}}-\varepsilon') \\ -0'',123561.\sin.3.(n^{\text{iv}}t-n't+\varepsilon^{\text{iv}}-\varepsilon') \\ -0'',008501.\sin.4.(n^{\text{iv}}t-n't+\varepsilon^{\text{iv}}-\varepsilon') \end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{\text{v}}).\left\{\begin{array}{l} 0'',587881.\sin.(n^{\text{v}}t-n't+\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon') \\ -0'',123022.\sin.2.(n^{\text{v}}t-n't+\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon') \\ -0'',004031.\sin.3.(n^{\text{v}}t-n't+\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon') \end{array}\right\};$$

$$\delta r'=(1+\mu'').\left\{\begin{array}{l} -0,0000003145 \\ +0,0000038362.\cos.(n''t-n't+\varepsilon''-\varepsilon') \\ +0,0000165050.\cos.2.(n''t-n't+\varepsilon''-\varepsilon') \\ -0,0000140155.\cos.3.(n''t-n't+\varepsilon''-\varepsilon') \\ -0,0000024255.\cos.4.(n''t-n't+\varepsilon''-\varepsilon') \\ -0,0000008873.\cos.5.(n''t-n't+\varepsilon''-\varepsilon') \\ -0,0000004021.\cos.6.(n''t-n't+\varepsilon''-\varepsilon') \\ -0,0000002033.\cos.7.(n''t-n't+\varepsilon''-\varepsilon') \\ -0,0000001094.\cos.8.(n''t-n't+\varepsilon''-\varepsilon') \end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{\text{iv}}).\left\{\begin{array}{l} -0,0000003106 \\ +0,0000048903.\cos.(n^{\text{iv}}t-n't+\varepsilon^{\text{iv}}-\varepsilon') \\ -0,0000021911.\cos.2.(n^{\text{iv}}t-n't+\varepsilon^{\text{iv}}-\varepsilon') \\ -0,0000001155.\cos.3.(n^{\text{iv}}t-n't+\varepsilon^{\text{iv}}-\varepsilon') \\ -0,0000000098.\cos.4.(n^{\text{iv}}t-n't+\varepsilon^{\text{vi}}-\varepsilon') \end{array}\right\}.$$

Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.

$$\delta v'=(1+\mu).2'',472014.\sin.(2n't-nt+2\varepsilon'-\varepsilon-\varpi);$$

$$+(1+\mu'').\left\{\begin{array}{l} 0'',225944.\sin.(n''t+\varepsilon''-\varpi') \\ -\ 0'',394198.\sin.(n''t+\varepsilon''-\varpi'') \\ +\ 0'',503442.\sin.(2n''t-n't+2\varepsilon''-\varepsilon'-\varpi') \\ -\ 0'',350134.\sin.(2n''t-n't+2\varepsilon''-\varepsilon'-\varpi'') \\ -\ 4'',782561.\sin.(3n''t-2n't+3\varepsilon''-2\varepsilon'-\varpi') \\ +14'',710902.\sin.(3n''t-2n't+3\varepsilon''-2\varepsilon'-\varpi'') \\ -\ 0'',924314.\sin.(4n''t-3n't+4\varepsilon''-3\varepsilon'-\varpi') \\ +\ 2'',924841.\sin.(4n''t-3n't+4\varepsilon''-3\varepsilon'-\varpi'') \\ -\ 2'',135011.\sin.(5n''t-4n't+5\varepsilon''-4\varepsilon'-\varpi') \\ +\ 6'',779405.\sin.(5n''t-4n't+5\varepsilon''-4\varepsilon'-\varpi'') \\ +\ 0'',328502.\sin.(3n't-2n''t+3\varepsilon'-2\varepsilon''-\varpi') \end{array}\right\}$$

$$-(1+\mu''').3'',372700.\sin.(3n'''t-2n't+3\varepsilon'''-2\varepsilon'-\varpi''')$$

$$+(1+\mu^{\text{IV}}).\begin{cases}-4'',641646.\sin.(n^{\text{IV}}t+\varepsilon^{\text{IV}}-\varpi^{\text{IV}})\\ -0'',991075.\sin.(2n^{\text{IV}}t-n't+2\varepsilon^{\text{IV}}-\varepsilon'-\varpi')\\ +0'',717378.\sin.(2n^{\text{IV}}t-n't+2\varepsilon^{\text{IV}}-\varepsilon'-\varpi^{\text{IV}})\\ -0'',504538.\sin.(3n^{\text{IV}}t-2n't+3\varepsilon^{\text{IV}}-2\varepsilon'-\varpi^{\text{IV}})\end{cases}$$

$$-(1+\mu^{\text{V}}).0'',675132.\sin.(n^{\text{V}}t+\varepsilon^{\text{V}}-\varpi^{\text{V}});$$

$$\delta r'=-(1+\mu).0,0000008831.\cos.(2n't-nt+2\varepsilon'-\varepsilon-\varpi)$$

$$+(1+\mu'')\begin{cases}0,0000016482.\cos.(3n''t-2n't+3\varepsilon''-2\varepsilon'-\varpi'')\\ -0,0000011406.\cos.(5n''t-4n't+5\varepsilon''-4\varepsilon'-\varpi')\\ +0,0000036421.\cos.(5n''t-4n't+5\varepsilon''-4\varepsilon'-\varpi'')\end{cases}$$

$$-(1+\mu''').0,0000019404.\cos.(3n'''t-2n't+3\varepsilon'''-2\varepsilon'-\varpi''').$$

Inégalités dépendantes des carrés et des produits de deux dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites.

$$\delta v'=-(1+\mu).1'',029617.\sin.(4n't-2nt+4\varepsilon'-2\varepsilon-43^\circ,8980)$$

$$-(1+\mu'').\begin{cases}4'',645172.\sin.(5n''t-3n't+5\varepsilon''-3\varepsilon'+23^\circ,2302)\\ +0'',275774.\sin.(4n''t-2n't+4\varepsilon''-2\varepsilon'+29^\circ,9358)\end{cases}$$

$$+(1+\mu''').6'',202706.\sin.(3n'''t-n't+3\varepsilon'''-\varepsilon'+73^\circ,2065).$$

En vertu des rapports qui existent entre les moyens mouvemens de Mercure, Vénus, la Terre et Mars, les quantités $2n-5n'$, $5n''-3n'$, et $n'-3n'''$ sont très-petites par rapport à n'; ainsi, par le n°. 3, les inégalités précédentes paroissent être les seules de l'ordre des carrés des excentricités, qui puissent être sensibles.

Inégalités dépendantes des cubes et des produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites.

$$\delta v'=(1+\mu).3'',656920.\sin.(2nt-5n't+2\varepsilon-5\varepsilon'+33^\circ,5852).$$

Inégalités du mouvement de Vénus en latitude.

Les formules du n°. 51 donnent,

$$\delta s' = -(1+\mu'').\left\{\begin{array}{l} 0'',385197.\sin.(n''t+\varepsilon''-\theta') \\ +0'',280655.\sin.(2n''t-n't+2\varepsilon''-\varepsilon'-\theta') \\ +0'',226675.\sin.(3n''t-2n't+3\varepsilon''-2\varepsilon'-\theta') \\ +0'',251485.\sin.(4n''t-3n't+4\varepsilon''-3\varepsilon'-\theta') \\ +0'',964615.\sin.(5n''t-4n't+5\varepsilon''-4\varepsilon'-\theta') \\ -0'',241108.\sin.(2n't-n''t+2\varepsilon'-\varepsilon''-\theta') \end{array}\right\}$$

$$-(1+\mu''').0'',458953.\sin.(3n'''t-2n't+3\varepsilon'''-2\varepsilon'-\Pi''')$$

$$+(1+\mu^{\text{iv}}).0'',498190.\sin.(2n^{\text{iv}}t-n't+2\varepsilon^{\text{iv}}-\varepsilon'-\Pi^{\text{iv}}).$$

Π''' étant ici la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Mars sur celle de Vénus, et Π^{iv} étant la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Jupiter sur celle de Vénus.

CHAPITRE X.

Théorie du mouvement de la Terre.

29. V' étant la longitude géocentrique de Vénus, et α étant supposé égal à $\frac{r'}{r''}$, V' sera fonction de α et de $v'-v''$; on aura donc par le n°. 27,

$$\delta V' = -\frac{\delta\alpha . \sin.(v'-v'')}{1-2\alpha . \cos.(v'-v'')+\alpha^2};$$

ce qui donne par le même n°., lorsque $\delta V'$ est à son *maximum*,

$$\delta V' = -\frac{\delta\alpha}{1-\alpha^2}.$$

En ne faisant varier que r'' dans $\delta\alpha$, on a $\delta\alpha = -\frac{\alpha\delta r''}{r''}$; partant

$$\delta r'' = r'' . \frac{(1-\alpha^2)}{\alpha} . \delta V'.$$

En supposant $\delta V' = \pm 1''$, et prenant pour r' et r'', les moyennes distances de Vénus et de la Terre au Soleil, on aura

$$\delta r'' = \pm 0{,}000001035.$$

Si l'on nomme V''', la longitude géocentrique de Mars, et si l'on fait $\frac{r''}{r'''} = \alpha$, on aura par le n°. 27,

$$\delta r'' = r''' . (1-\alpha^2) . \delta V''';$$

en prenant pour r'' et r''' les moyennes distances de la Terre et de Mars au Soleil, on a

$$\alpha = 0{,}65630030;$$
$$r''' = 1{,}52369352;$$

En supposant donc $\delta V''' = \pm 1''$, on aura

$$\delta r''' = \pm 0{,}000001363;$$

on peut donc négliger les inégalités de $\delta r''$, dont le coëfficient est au-dessous de $\pm 0{,}000001$. Nous négligerons les inégalités du mouvement de la terre, en longitude, au-dessous d'un quart de seconde.

Inégalités de la Terre, indépendantes des excentricités.

$$\delta v'' = (1+\mu').\begin{cases} 16'',329870.\sin.(n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ -18'',567565.\sin.2.(n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ -\ 2'',294582.\sin.3.(n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ -\ 0'',695799.\sin.4.(n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ -\ 0'',281511.\sin.5.(n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ -\ 0'',132113.\sin.6.(n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ -\ 0'',067984.\sin.7.(n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ -\ 0'',037202.\sin.8.(n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \end{cases}$$

$$+(1+\mu''').\begin{cases} 1''.318563.\sin.(n'''t - n''t + \varepsilon''' - \varepsilon'') \\ +10'',750115.\sin.2.(n'''t - n''t + \varepsilon''' - \varepsilon'') \\ -\ 0'',664350.\sin.3.(n'''t - n''t + \varepsilon''' - \varepsilon'') \\ -\ 0'',145130.\sin.4.(n'''t - n''t + \varepsilon''' - \varepsilon'') \\ -\ 0'',048984.\sin.5.(n'''t - n''t + \varepsilon''' - \varepsilon'') \\ -\ 0'',019931.\sin.6.(n'''t - n''t + \varepsilon''' - \varepsilon'') \\ -\ 0'',009022.\sin.7.(n'''t - n''t + \varepsilon''' - \varepsilon'') \end{cases}$$

$$+(1+\mu^{\text{IV}}).\begin{cases} 21'',787201.\sin.(n^{\text{IV}}t - n''t + \varepsilon^{\text{IV}} - \varepsilon'') \\ -\ 8'',253880.\sin.2.(n^{\text{IV}}t - n''t + \varepsilon^{\text{IV}} - \varepsilon'') \\ -\ 0'',517808.\sin.3.(n^{\text{IV}}t - n''t + \varepsilon^{\text{IV}} - \varepsilon'') \\ -\ 0'',051076.\sin.4.(n^{\text{IV}}t - n''t + \varepsilon^{\text{IV}} - \varepsilon'') \end{cases}$$

$$+(1+\mu^{\text{V}}).\begin{cases} 1'',356204.\sin.(n^{\text{V}}t - n''t + \varepsilon^{\text{V}} - \varepsilon'') \\ -0'',342623.\sin.2.(n^{\text{V}}t - n''t + \varepsilon^{\text{V}} - \varepsilon'') \\ -0'',012792.\sin.3.(n^{\text{V}}t - n''t + \varepsilon^{\text{V}} - \varepsilon'') \end{cases};$$

$$\delta r'' = (1+\mu').\begin{cases} 0,0000015553 \\ -0,0000060012.\cos.(n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ +0,0000171431.\cos.2.(n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ +0,0000027072.\cos.3.(n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ +0,0000009358.\cos.4.(n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ +0,0000004086.\cos.5.(n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ +0,0000002008.\cos.6.(n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \end{cases}$$

$$+(1+\mu''').\begin{cases} -0,0000000478 \\ +0,0000005487.\cos.(n'''t - n''t + \varepsilon''' - \varepsilon'') \\ +0,0000080620.\cos.2.(n'''t - n''t + \varepsilon''' - \varepsilon'') \\ -0,0000006475.\cos.3.(n'''t - n''t + \varepsilon''' - \varepsilon'') \\ -0,0000001643.\cos.4.(n'''t - n''t + \varepsilon''' - \varepsilon'') \end{cases}$$

$$+(1+\mu^{\text{IV}}).$$

$$+(1+\mu^{\text{IV}}).\left\{\begin{array}{l}
-0{,}0000011581 \\
+0{,}0000159384.\cos.(n^{\text{IV}}t-n''t+\varepsilon^{\text{IV}}-\varepsilon'') \\
-0{,}0000090986.\cos.2.(n^{\text{IV}}t-n''t+\varepsilon^{\text{IV}}-\varepsilon'') \\
-0{,}0000006550.\cos.3.(n^{\text{IV}}t-n''t+\varepsilon^{\text{IV}}-\varepsilon'') \\
-0{,}0000000704.\cos.4.(n^{\text{IV}}t-n''t+\varepsilon^{\text{IV}}-\varepsilon'')
\end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{\text{V}}).\left\{\begin{array}{l}
-0{,}0000000580 \\
+0{,}0000010337.\cos.(n^{\text{V}}t-n''t+\varepsilon^{\text{V}}-\varepsilon'') \\
-0{,}0000003859.\cos.2.(n^{\text{V}}t-n''t+\varepsilon^{\text{V}}-\varepsilon'')
\end{array}\right\}$$

Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.

$$\delta v''=\quad(1+\mu').\left\{\begin{array}{l}
\quad 0'',234290.\sin.(n't+\varepsilon'-\varpi'') \\
-\ 0'',400233.\sin.(2n't-n''t+2\varepsilon'-\varepsilon''-\varpi'') \\
+\ 0'',448083.\sin.(2n''t-n't+2\varepsilon''-\varepsilon'-\varpi'') \\
-\ 0'',521547.\sin.(2n''t-n't+2\varepsilon''-\varepsilon'-\varpi') \\
-11'',318247.\sin.(3n''t-2n't+3\varepsilon''-2\varepsilon'-\varpi'') \\
+\ 3'',661696.\sin.(3n''t-2n't+3\varepsilon''-2\varepsilon'-\varpi') \\
-\ 7'',231346.\sin.(4n''t-3n't+4\varepsilon''-3\varepsilon'-\varpi'') \\
+\ 2'',229704.\sin.(4n''t-3n't+4\varepsilon''-3\varepsilon'-\varpi') \\
+\ 0'',667802.\sin.(5n''t-4n't+5\varepsilon''-4\varepsilon'-\varpi'')
\end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu''').\left\{\begin{array}{l}
-3'',381490.\sin.(2n'''t-n''t+2\varepsilon'''-\varepsilon''-\varpi'') \\
+6'',597711.\sin.(2n'''t-n''t+2\varepsilon'''-\varepsilon''-\varpi''') \\
-0'',269754.\sin.(3n'''t-2n''t+3\varepsilon'''-2\varepsilon''-\varpi'') \\
+2'',043057.\sin.(3n'''t-2n''t+3\varepsilon'''-2\varepsilon''-\varpi''') \\
-0'',320240.\sin.(4n'''t-3n''t+4\varepsilon'''-3\varepsilon''-\varpi'') \\
+2'',491082.\sin.(4n'''t-3n''t+4\varepsilon'''-3\varepsilon''-\varpi''') \\
-0'',416405.\sin.(5n'''t-4n''t+5\varepsilon'''-4\varepsilon''-\varpi''')
\end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{\text{IV}}).\left\{\begin{array}{l}
\quad 0'',932384.\sin.(n^{\text{IV}}t+\varepsilon^{\text{IV}}-\varpi'') \\
-7'',839149.\sin.(n^{\text{IV}}t+\varepsilon^{\text{IV}}-\varpi^{\text{IV}}) \\
-4'',605075.\sin.(2n^{\text{IV}}t-n''t+2\varepsilon^{\text{IV}}-\varepsilon''-\varpi'') \\
+1'',871601.\sin.(2n^{\text{IV}}t-n''t+2\varepsilon^{\text{IV}}-\varepsilon''-\varpi^{\text{IV}}) \\
-1'',677049.\sin.(3n^{\text{IV}}t-2n''t+3\varepsilon^{\text{IV}}-2\varepsilon''-\varpi^{\text{IV}}) \\
-0'',459646.\sin.(2n''t-n^{\text{IV}}t+2\varepsilon''-\varepsilon^{\text{IV}}-\varpi'') \\
-0'',289022.\sin.(2n''t-n^{\text{IV}}t+2\varepsilon''-\varepsilon^{\text{IV}}-\varpi^{\text{IV}})
\end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{\text{V}}).\left\{\begin{array}{l}
-1'',110867.\sin.(n^{\text{V}}t+\varepsilon^{\text{V}}-\varpi^{\text{V}}) \\
-0'',468371.\sin.(2n^{\text{V}}t-n''t+2\varepsilon^{\text{V}}-\varepsilon''-\varpi'')
\end{array}\right\};$$

$$\delta r'' = (1+\mu').\begin{cases} -0{,}0000030439.\cos.(3n''t-2n't+3\varepsilon''-2\varepsilon'-\varpi'') \\ -0{,}0000049815.\cos.(4n''t-3n't+4\varepsilon''-3\varepsilon'-\varpi'') \\ +0{,}0000015895.\cos.(4n''t-3n't+4\varepsilon''-3\varepsilon'-\varpi') \end{cases}$$
$$+(1+\mu''').\ 0{,}0000017707.\cos.(4n'''t-3n''t+4\varepsilon'''-3\varepsilon''-\varpi''')$$
$$+(1+\mu^{\text{iv}}).\begin{cases} -0{,}0000030410.\cos.(2n^{\text{iv}}t-n''t+2\varepsilon^{\text{iv}}-\varepsilon''-\varpi'') \\ +0{,}0000012652.\cos.(2n^{\text{iv}}t-n''t+2\varepsilon^{\text{iv}}-\varepsilon''-\varpi^{\text{iv}}) \\ -0{,}0000018101.\cos(3n^{\text{iv}}t-2n''t+3\varepsilon^{\text{iv}}-2\varepsilon''-\varpi^{\text{iv}}) \end{cases}.$$

Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites.

$$\delta v'' = (1+\mu').3'',473997.\sin.(5n''t-3n't+5\varepsilon''-3\varepsilon'+23°,3759)$$
$$+(1+\mu''').\begin{cases} 3'',067702.\sin.(4n'''t-2n''t+4\varepsilon'''-2\varepsilon''+75°,3506) \\ +1'',085790.\sin.(5n'''t-3n''t+5\varepsilon'''-3\varepsilon''+76°,0214) \end{cases}.$$

En vertu des rapports qui existent entre les moyens mouvemens de Vénus, la Terre et Mars ; $5n''-3n'$, et $4n'''-2n''$, sont de petits coëfficiens ; en sorte que par le n°. 3, les deux premières de ces inégalités sont les seules de cet ordre qui doivent être sensibles. On a cependant calculé la troisième, parce que $3n''-5n'''$ n'étant à-peu-près que la moitié de n'', il étoit utile de s'assurer que cette inégalité n'acquiert par cette considération, qu'une valeur très-peu sensible.

Inégalités dépendantes du cube et des produits de trois dimensions, des excentricités et des inclinaisons des orbites.

$$\delta v'' = (1+\mu).0'',215787.\sin.(nt-4n''t+\varepsilon-4\varepsilon''+21°,1522).$$

Inégalités périodiques du mouvement de la terre en latitude.

On a trouvé par les formules du n°. 51 du second livre,

$$\delta s'' = (1+\mu').\begin{cases} 0'',306112.\sin.(2n''t-n't+2\varepsilon''-\varepsilon'-\theta') \\ 0'',723012.\sin.(4n''t-3n't+4\varepsilon''-3\varepsilon'-\theta') \end{cases}$$
$$+(1+\mu^{\text{iv}}).0'',508343.\sin.(2n^{\text{iv}}t-n''t+2\varepsilon^{\text{iv}}-\varepsilon''-\theta^{\text{iv}}).$$

Inégalités de la Terre, dépendantes de l'action de la Lune.

30. Si l'on nomme U la longitude de la lune vue du centre de la terre; et v'' la longitude de la terre vue du centre du soleil: si l'on nomme encore R le rayon vecteur de la lune, et r'', celui de la terre; enfin, si l'on désigne par m et M les masses de la lune et de la terre, et par s la latitude de la lune; on a vu dans le chapitre IV, que l'inégalité du mouvement de la terre en longitude, produite par l'action de la lune, est

$$-\frac{m}{M}.R.\sin.(U-v'').$$

L'inégalité du rayon vecteur de la terre, est

$$-\frac{m}{M}.\frac{R}{r''}.\cos.(U-v'');$$

et l'inégalité du mouvement de la terre en latitude, est

$$-\frac{m}{M}.\frac{R}{r''}.s.$$

Il faut, pour plus d'exactitude, substituer $\frac{m}{M+m}$ au lieu de $\frac{m}{M}$, dans les expressions de ces trois inégalités..

Nous supposerons, conformément aux phénomènes des marées (livre IV, nos 31 et 35),

$$\frac{m}{R^3}=\frac{3.S}{r''^3};$$

S étant la masse du soleil. Or on a par la théorie des forces centrales,

$$\frac{M+m}{R^3}=n_{,}^2; \quad \frac{S}{r''^3}=n''^2;$$

$n_{,}t$ étant le moyen mouvement de la lune; on a donc,

$$\frac{m}{M+m}=\frac{3n''^2}{n_{,}^2}.$$

Suivant les observations, $\frac{n''}{n_{,}}=0{,}0748013$; ce qui donne

$$\frac{m}{M+m}=\frac{1}{59{,}6};$$

et par conséquent,

$$\frac{m}{M}=\frac{1}{58{,}6}.$$

Nous supposerons ensuite la parallaxe horizontale du soleil, égale à 27″2; et la parallaxe moyenne horizontale de la lune égale à 10661″; d'où l'on tire,

$$\frac{R}{r''} = \frac{27,2}{10661};$$

et conséquemment,

$$\delta v'' = -27'',2524.\sin.(U - v'')$$
$$\delta r'' = -0,000042808.\cos.(U - v'').$$

En prenant ensuite pour s la plus grande inégalité de la lune en latitude, que nous supposerons égale à $57231''.\sin.(U-\theta)$, $U-\theta$ étant la distance de la lune à son nœud ascendant; on aura

$$-2'',4499.\sin.(U - \theta)$$

pour l'inégalité du mouvement de la terre en latitude : il faut l'ajouter à la valeur précédente de $\delta s''$, pour avoir la valeur entière de $\delta s''$. Cette valeur entière, prise avec un signe contraire, donne les inégalités du mouvement apparent du soleil en latitude. Elle influe sur l'obliquité de l'écliptique, conclue de l'observation des hauteurs du soleil vers les solstices : elle influe encore sur le moment de l'équinoxe, conclu des observations du soleil vers les équinoxes, et sur l'ascension droite, et la déclinaison des étoiles, déterminées par leur comparaison avec le soleil. Vu la précision des observations modernes, il est nécessaire d'y avoir égard. Il est facile de voir que la déclinaison apparente du soleil en est augmentée de la quantité

$$-\frac{\delta s''.\cos.(\text{obliquité de l'écliptique})}{\cos.(\text{déclinaison du soleil})};$$

et que son ascension droite apparente en est augmentée de la quantité

$$\frac{\delta s''.\sin.(\text{obliquité de l'écliptique}).\cos.(\text{ascension droite du soleil})}{\cos.(\text{déclinaison du soleil})};$$

il faut donc diminuer de ces quantités, les déclinaisons et les ascensions droites observées du soleil, pour avoir celles qu'on observeroit, si la terre ne quittoit point le plan de l'écliptique.

Des variations séculaires de l'orbe terrestre, de l'équateur et de la longueur de l'année.

31. Nous avons donné dans le n°. 26, les variations séculaires des élémens de l'orbe terrestre ; mais l'influence de ces variations sur les phénomènes les plus importans de l'astronomie, nous engage à les déterminer avec plus de précision, en ayant égard au carré du temps. t exprimant un nombre quelconque d'années juliennes écoulées depuis 1750, on a trouvé, par la méthode du n°. 56 du second livre, et en adoptant les valeurs des masses des planètes données dans le n°. 21, le coëfficient de l'équation du centre de l'orbite terrestre égal à

$$2E - t.0'',579130 - t^2.0'',0000207446;$$

$2E$ étant ce coëfficient au commencement de 1750, où t est nul. On a trouvé pareillement la longitude sydérale du périhélie de l'orbe terrestre, égale à

$$\varpi'' + t.36'',881443 + t^2.0'',0002454382.$$

Enfin, les valeurs de p'' et de q'' pour un temps quelconque t, ont été trouvées respectivement égales à

$$t.0'',236793 + t^2.0'',0000665275;$$
$$-t.1'',546156 + t^2.0'',0000208253.$$

Nous avons présenté dans les n°s 6 et 7 du cinquième livre, les formules de la précession des équinoxes, et de l'inclinaison de l'équateur, soit à une écliptique fixe, soit à l'écliptique vraie ; mais ces formules supposent que la valeur de p'' est sous la forme $\Sigma.c.\sin.(gt+\epsilon)$, et que q'' est sous la forme $\Sigma.c.\cos.(gt+\epsilon)$. On a vu dans le n°. 59 du second livre, que les expressions finies de p'' et de q'' se présentent sous ces formes, et l'on peut déterminer, par la méthode exposée dans le n°. 56 du même livre, les valeurs de c, g, ϵ; &c. ; mais cela suppose les masses des planètes exactement connues, et l'on a vu l'incertitude qui existe encore à cet égard. Ainsi, au lieu de faire le calcul pénible que cette méthode exige, il est préférable de le simplifier, en n'étendant les résultats qu'à mille ou douze cents ans avant et après l'époque de 1750 ;

ce qui suffit aux besoins de l'astronomie. On pourra facilement recommencer ces calculs, à mesure que le développement des variations séculaires fera mieux connoître les masses des planètes. Donnons aux valeurs de p'' et de q'' les formes suivantes comprises dans celles-ci, $\Sigma.c.\sin.(gt+\epsilon)$, $\Sigma.c.\cos.(gt+\epsilon)$,

$$c.\sin.\epsilon - c.\cos.\epsilon.\sin.gt - c.\sin.\epsilon.\sin.\left(g't+\frac{\pi}{2}\right);$$

$$c.\cos.\epsilon - c.\cos.\epsilon.\cos.gt - c.\sin.\epsilon.\cos.\left(g't+\frac{\pi}{2}\right);$$

π étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité. Si l'on développe ces deux fonctions par rapport aux puissances du temps t; on aura, en les comparant aux séries précédentes,

$$c\,g.\cos.\epsilon = -0'',236793\;; \qquad cg'.\sin.\epsilon = -1'',546156\;;$$
$$cg^2.\cos.\epsilon = 0'',0000416506\;; \qquad cg'^2.\sin.\epsilon = 0'',0001330550\;;$$

d'où il est facile de conclure,

$$g = -111'',978\;; \qquad g' = -54''7845\;;$$
$$c.\sin.\epsilon = 17967'',0\;; \qquad c.\cos.\epsilon = 1346'',21.$$

Maintenant, on a vu dans le n°. 6 du cinquième livre, que la précession ψ des équinoxes par rapport à l'écliptique fixe de 1750, est, en ne considérant que les variations séculaires,

$$lt+\zeta+\Sigma.\left\{\left(\frac{l}{f}-1\right).\text{tang}.h+\cot.h\right\}.\frac{lc}{f}.\sin.(ft+\epsilon).$$

Pour avoir $\Sigma.c.\sin.(ft+\epsilon)$, il faut, par le n°. 5 du même livre, augmenter dans $\Sigma.c.\sin.(gt+\epsilon)$, l'angle $gt+\epsilon$, de lt, ce qui donne $f=g+l$; on aura ainsi,

$$\Sigma.c.\sin.(ft+\epsilon) = c.\sin.(lt+\epsilon) - c.\cos.\epsilon.\sin.(gt+lt) - c.\sin.\epsilon.\sin.\left(g't+lt+\frac{\pi}{2}\right);$$

par conséquent,

$$\psi = lt+\zeta+c.\cot.h.\sin.(lt+\epsilon) - \frac{l}{l+g}.c.\cos.\epsilon.\left\{\cot.h-\frac{g}{l+g}.\text{tang}.h\right\}.\sin.(gt+lt) - \frac{l}{l+g'}.c.\sin.\epsilon.\left\{\cot.h-\frac{g'}{l+g'}.\text{tang}.h\right\}.\sin.\left(g't+lt+\frac{\pi}{2}\right).$$

En nommant ensuite V, l'inclinaison de l'équateur à l'écliptique fixe de 1750, on aura par le n°. 6 du cinquième livre,

$$V = h - \Sigma.\frac{lc}{f}.\cos.(ft+\varepsilon).$$

Pour avoir $\Sigma.c.\cos.(ft+\varepsilon)$, il faut, par le n°. 5 du même livre, augmenter dans $\Sigma.c.\cos.(gt+\varepsilon)$, l'angle $gt+\varepsilon$, de lt; on aura ainsi,

$$\Sigma.c.\cos.(ft+\varepsilon) = c.\cos.(lt+\varepsilon) - c.\cos.\varepsilon.\cos.(gt+lt)$$
$$- c.\sin.\varepsilon.\cos.\left(g't+lt+\frac{\pi}{2}\right);$$

Partant,

$$V = h - c.\cos.(lt+\varepsilon) + \frac{l}{g+l}.c.\cos.\varepsilon.\cos.(gt+lt)$$
$$+ \frac{l}{g'+l}.c.\sin.\varepsilon.\cos.\left(g't+lt+\frac{\pi}{2}\right).$$

ψ' exprimant la précession des équinoxes par rapport à l'écliptique vraie, et V' étant l'inclinaison de l'équateur à cette écliptique; on trouvera par le n°. 7 du cinquième livre,

$$\psi' = lt + \zeta + \frac{g}{l+g}.c.\cos.\varepsilon.\left\{\cot.h + \frac{l}{l+g}.\text{tang}.h\right\}.\sin.(gt+lt)$$
$$+ \frac{g'}{l+g'}.c.\sin.\varepsilon.\left\{\cot.h + \frac{l}{l+g'}.\text{tang}.h\right\}.\sin.\left(g't+lt+\frac{\pi}{2}\right);$$

$$V' = h - \frac{g}{l+g}.c.\cos.\varepsilon.\cos.(gt+lt) - \frac{g'}{l+g'}.c.\sin.\varepsilon.\cos.\left(g't+lt+\frac{\pi}{2}\right).$$

L'expression de ψ' donne

$$\frac{d\psi'}{dt} = l + cg.\cos.\varepsilon.\left\{\cot.h + \frac{l}{l+g}.\text{tang}.h\right\}.\cos.(gt+lt)$$
$$+ cg'.\sin.\varepsilon.\left\{\cot.h + \frac{l}{l+g'}.\text{tang}.h\right\}.\cos.\left(g't+lt+\frac{\pi}{2}\right).$$

En retranchant de cette valeur de $\frac{d\psi'}{dt}$, lorsque t est nul, sa valeur à une autre époque; la différence réduite en temps, en raison de la circonférence pour une année tropique, donnera l'accroissement de l'année tropique depuis 1750. On voit par cette formule, et par la différentiation de l'expression générale de ψ' donnée dans le n°. 7 du cinquième livre, que l'action du soleil et de la lune change consi-

dérablement la loi de la variation de la longueur de l'année. Dans les hypothèses les plus vraisemblables sur les masses des planètes, l'étendue entière de cette variation, ainsi que l'étendue entière de la variation de l'obliquité de l'écliptique à l'équateur, sont réduites à-peu-près au quart de la valeur qu'elles auroient sans cette action.

Suivant les observations, on a en 1750, $\frac{d\psi'}{dt} = 154'',63$; mais par ce qui précède, on a à cette époque,

$$\frac{d\psi'}{dt} = l + cg.\cos.\epsilon.\left\{\cot.h + \frac{l}{l+g}.\text{tang}.h\right\};$$

on a donc

$$l + cg.\cos.\epsilon.\left\{\cot.h + \frac{l}{l+g}.\text{tang}.h\right\} = 154'',63;$$

équation dans laquelle on peut, en négligeant le carré de c, substituer pour h, l'obliquité de l'écliptique à l'équateur en 1750. Cette obliquité, suivant les observations, étoit alors égale à 26°,0796; d'où l'on tire

$$l = 155'',542.$$

On a ensuite, en 1750,

$$V' = h - \frac{g}{l+g}.c.\cos.\epsilon;$$

ce qui donne

$$h = 26°,0796 - 3460'',3.$$

Au moyen de ces valeurs, on trouve

$$\begin{aligned}\psi &= t.155'',542 + 2°,92883 + 42118'',3.\sin.(t.155'',542 + 95°,2389)\\ &\quad - 71289'',2.\cos.(t.100'',757) - 16521'',1.\sin.(t.43'',564);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= 26°,0796 - 3460'',3 - 18017'',4.\cos.(t.155'',542 + 95°,2389)\\ &\quad + 4806'',5.\cos.(t.43'',564) - 27736'',3.\sin.(t.100'',757);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi' &= t.155'',542 + 2°,92883 - 29288'',3.\cos.(t.100'',757)\\ &\quad - 13374'',2.\sin.(t.43'',564);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V' &= 26°,0796 - 3460'',3.\{1 - \cos.(t.43'',564)\}\\ &\quad - 9769'',2.\sin.(t.100'',757).\end{aligned}$$

On pourra, par ces expressions, déterminer la précession des équinoxes et l'obliquité de l'écliptique, dans l'intervalle de mille ou douze cents ans avant et après l'époque de 1750, en observant de

de faire t négatif pour les temps antérieurs à cette époque ; on pourra même les étendre aux observations d'Hypparque, vu leur imperfection.

La valeur précédente de ψ' donne pour l'accroissement de l'année tropique, à partir de 1750,

$$-0^{\text{jours}},000083569.\{1-\cos.(t.43'',564)\}$$
$$-0^{\text{jours}},00042327.\sin.(t.100'',757);$$

d'où il suit qu'au temps d'Hypparque, ou cent vingt-huit ans avant l'ère chrétienne, l'année tropique étoit de 12″,326 plus longue qu'en 1750 ; l'obliquité de l'écliptique étoit plus grande alors de 2832″,27.

Une époque astronomique remarquable, est celle où le grand axe de l'orbe terrestre coïncidoit avec la ligne des équinoxes ; car alors l'équinoxe vrai et l'équinoxe moyen étoient réunis. Je trouve par les formules précédentes, que ce phénomène a eu lieu vers l'an 4004 avant l'ère chrétienne, époque où la plupart de nos chronologistes placent la création du monde, et qui, sous ce point de vue, peut être considérée comme une époque astronomique. En effet, on a pour ce temps, $t=-5754$; et l'expression précédente de ψ' donne,

$$\psi'=-87^\circ,8530;$$

c'est la longitude de l'équinoxe fixe de 1750, par rapport à l'équinoxe d'alors. L'expression précédente de ϖ'' donne pour la longitude du périgée de l'orbe terrestre, ou de l'apogée solaire, comptée de l'équinoxe fixe de 1750,

$$\varpi''=89^\circ,1700.$$

Cette longitude par rapport à l'équinoxe de l'année 4004 avant l'ère chrétienne, étoit donc, 1°,3170 ; d'où il suit que l'instant où la longitude de l'apogée solaire, comptée de l'équinoxe mobile, étoit nulle, précède d'environ soixante-neuf ans l'époque où l'on fixe la création du monde. Cette différence paroîtra bien petite, si l'on considère l'inexactitude des expressions précédentes de ψ' et de ϖ'', lorsqu'on les rapporte à un temps aussi éloigné, et l'incertitude qui subsiste encore, soit relativement au mouvement des équinoxes, soit à l'égard des valeurs que nous supposons aux masses des planètes.

Une autre époque astronomique remarquable, est celle où le grand axe de l'orbe terrestre étoit perpendiculaire à la ligne des équinoxes ; car alors le solstice vrai et le solstice moyen étoient réunis. Cette seconde époque est beaucoup plus rapprochée de nous, et remonte à-peu-près à l'année 1250. Si l'on suppose, en effet, $t = -500$, les formules précédentes donnent 100°,0189 pour la longitude de l'apogée solaire, comptée de l'équinoxe mobile; ainsi, l'instant où cette longitude étoit de 100°, répond à fort peu-près au commencement de 1749. L'incertitude des élémens du calcul en laisse une, au moins d'une année, sur ce résultat.

CHAPITRE XI.

Théorie de Mars.

32. On a par le n°. 29, dans le cas du *maximum* de $\delta V'''$,

$$\delta\alpha = (1-\alpha^2).\delta V''';$$

α étant égal à $\frac{r''}{r'''}$. Si l'on ne fait varier que r''' dans α, on aura

$$\delta r''' = -\frac{r'''^2}{r''}.(1-\alpha^2).\delta V'''.$$

En prenant par r'' et r''', les moyennes distances de la Terre et de Mars au Soleil, et supposant $\delta V''' = \pm 1''$; on aura

$$\delta r''' = \mp 0{,}000002076;$$

on peut donc négliger les inégalités du rayon vecteur r''', dont les coëfficiens sont au-dessous de $\pm 0{,}000002$. Nous négligerons les inégalités du mouvement de Mars en longitude, au-dessous d'un quart de seconde.

Inégalités de Mars, indépendantes des excentricités.

$$\delta v''' = (1+\mu').\left\{\begin{array}{l} 0'',644302.\sin.(n't-n'''t+\varepsilon'-\varepsilon''') \\ -0'',076897.\sin.2.(n't-n'''t+\varepsilon'-\varepsilon''') \\ -0'',015431.\sin.3.(n't-n'''t+\varepsilon'-\varepsilon''') \\ -0'',004222.\sin.4.(n't-n'''t+\varepsilon'-\varepsilon''') \end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu'').\left\{\begin{array}{l} 21'',570470.\sin.(n''t-n'''t+\varepsilon''-\varepsilon''') \\ -\ 2'',989780.\sin.2.(n''t-n'''t+\varepsilon''-\varepsilon''') \\ -\ 0'',564852.\sin.3.(n''t-n'''t+\varepsilon''-\varepsilon''') \\ -\ 0'',179760.\sin.4.(n''t-n'''t+\varepsilon''-\varepsilon''') \\ -\ 0'',071294.\sin.5.(n''t-n'''t+\varepsilon''-\varepsilon''') \\ -\ 0'',031909.\sin.6.(n''t-n'''t+\varepsilon''-\varepsilon''') \\ -\ 0'',015408.\sin.7.(n''t-n'''t+\varepsilon''-\varepsilon''') \end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{\text{IV}}).\left\{\begin{array}{l} 75'',434700.\sin.\ (n^{\text{IV}}t-n'''t+\varepsilon^{\text{IV}}-\varepsilon''') \\ -41'',969330.\sin.\ 2.(n^{\text{IV}}t-n'''t+\varepsilon^{\text{IV}}-\varepsilon''') \\ -\ 3'',642865.\sin.\ 3.(n^{\text{IV}}t-n'''t+\varepsilon^{\text{IV}}-\varepsilon''') \\ -\ 0'',533236.\sin.\ 4.(n^{\text{IV}}t-n'''t+\varepsilon^{\text{IV}}-\varepsilon''') \\ -\ 0'',102363.\sin.\ 5.(n^{\text{IV}}t-n'''t+\varepsilon^{\text{IV}}-\varepsilon''') \\ -\ 0'',041427.\sin.\ 6.(n^{\text{IV}}t-n'''t+\varepsilon^{\text{IV}}-\varepsilon''') \end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{\text{V}}).\left\{\begin{array}{l} 4'',147390.\sin.\ (n^{\text{V}}t-n'''t+\varepsilon^{\text{V}}-\varepsilon''') \\ -1'',369345.\sin.\ 2.(n^{\text{V}}t-n'''t+\varepsilon^{\text{V}}-\varepsilon''') \\ -0'',071260.\sin.\ 3.(n^{\text{V}}t-n'''t+\varepsilon^{\text{V}}-\varepsilon''') \\ -0'',005799.\sin.\ 4.(n^{\text{V}}t-n'''t+\varepsilon^{\text{V}}-\varepsilon''') \end{array}\right\};$$

$$\delta r'''=(1+\mu').\left\{\begin{array}{l} 0,0000016104 \\ +0,0000021947.\cos.\ (n't-n'''t+\varepsilon'-\varepsilon''') \\ +0,0000001972.\cos.\ 2.(n't-n'''t+\varepsilon'-\varepsilon''') \\ +0,0000000418.\cos.\ 3.(n't-n'''t+\varepsilon'-\varepsilon''') \end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu'').\left\{\begin{array}{l} 0,0000023860 \\ -0,0000187564.\cos.\ (n''t-n'''t+\varepsilon''-\varepsilon''') \\ +0,0000052387.\cos.\ 2.(n''t-n'''t+\varepsilon''-\varepsilon''') \\ +0,0000011969.\cos.\ 3.(n''t-n'''t+\varepsilon''-\varepsilon''') \\ +0,0000004169.\cos.\ 4.(n''t-n'''t+\varepsilon''-\varepsilon''') \\ +0,0000001733.\cos.\ 5.(n''t-n'''t+\varepsilon''-\varepsilon''') \\ +0,0000000796.\cos.\ 6.(n''t-n'''t+\varepsilon''-\varepsilon''') \end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{\text{IV}}).\left\{\begin{array}{l} -0,0000066174 \\ +0,0000784371.\cos.\ (n^{\text{IV}}t-n'''t+\varepsilon^{\text{IV}}-\varepsilon''') \\ -0,0000679436.\cos.\ 2.(n^{\text{IV}}t-n'''t+\varepsilon^{\text{IV}}-\varepsilon''') \\ -0,0000069390.\cos.\ 3.(n^{\text{IV}}t-n'''t+\varepsilon^{\text{IV}}-\varepsilon''') \\ -0,0000010930.\cos.\ 4.(n^{\text{IV}}t-n'''t+\varepsilon^{\text{IV}}-\varepsilon''') \\ -0,0000002004.\cos.\ 5.(n^{\text{IV}}t-n'''t+\varepsilon^{\text{IV}}-\varepsilon''') \\ -0,0000000520.\cos.\ 6.(n^{\text{IV}}t-n'''t+\varepsilon^{\text{IV}}-\varepsilon''') \end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{\text{V}}).\left\{\begin{array}{l} -0,0000003173 \\ +0,0000047062.\cos.\ (n^{\text{V}}t-n'''t+\varepsilon^{\text{V}}-\varepsilon''') \\ -0,0000023275.\cos.\ 2.(n^{\text{V}}t-n'''t+\varepsilon^{\text{V}}-\varepsilon''') \\ -0,0000001399.\cos.\ 3.(n^{\text{V}}t-n'''t+\varepsilon^{\text{V}}-\varepsilon''') \\ -0,0000000125.\cos.\ 4.(n^{\text{V}}t-n'''t+\varepsilon^{\text{V}}-\varepsilon''') \end{array}\right\}.$$

Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.

$$\delta v''' = (1+\mu').\left\{\begin{array}{l} 3'',341189.\sin.(2n'''t - n't + 2\varepsilon''' - \varepsilon' - \varpi''') \\ -0'',779586.\sin.(2n'''t - n't + 2\varepsilon''' - \varepsilon' - \varpi') \end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu'').\left\{\begin{array}{l} 2'',156325.\sin.(n''t + \varepsilon'' - \varpi''') \\ -\ 0'',415215.\sin.(2n''t - n'''t + 2\varepsilon'' - \varepsilon''' - \varpi''') \\ -31'',218207.\sin.(2n'''t - n''t + 2\varepsilon''' - \varepsilon'' - \varpi''') \\ +15'',811920.\sin.(2n'''t - n''t + 2\varepsilon''' - \varepsilon'' - \varpi'') \\ -20'',111969.\sin.(3n'''t - 2n''t + 3\varepsilon''' - 2\varepsilon'' - \varpi''') \\ +\ 2'',611122.\sin.(3n'''t - 2n''t + 3\varepsilon''' - 2\varepsilon'' - \varpi'') \\ +\ 2'',091815.\sin.(4n'''t - 3n''t + 4\varepsilon''' - 3\varepsilon'' - \varpi''') \\ -\ 0'',244306.\sin.(4n'''t - 3n''t + 4\varepsilon''' - 3\varepsilon'' - \varpi'') \\ +\ 0'',370141.\sin.(5n'''t - 4n''t + 5\varepsilon''' - 4\varepsilon'' - \varpi''') \end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{\text{IV}}).\left\{\begin{array}{l} 16'',945362.\sin.(n^{\text{IV}}t + \varepsilon^{\text{IV}} - \varpi''') \\ -16'',564830.\sin.(n^{\text{IV}}t + \varepsilon^{\text{IV}} - \varpi^{\text{IV}}) \\ -72'',692383.\sin.(2n^{\text{IV}}t - n'''t + 2\varepsilon^{\text{IV}} - \varepsilon''' - \varpi''') \\ +\ 8'',003396.\sin.(2n^{\text{IV}}t - n'''t + 2\varepsilon^{\text{IV}} - \varepsilon''' - \varpi^{\text{IV}}) \\ +\ 7'',088590.\sin.(3n^{\text{IV}}t - 2n'''t + 3\varepsilon^{\text{IV}} - 2\varepsilon''' - \varpi''') \\ -11'',015046.\sin.(3n^{\text{IV}}t - 2n'''t + 3\varepsilon^{\text{IV}} - 2\varepsilon''' - \varpi^{\text{IV}}) \\ +\ 0'',679471.\sin.(4n^{\text{IV}}t - 3n'''t + 4\varepsilon^{\text{IV}} - 3\varepsilon''' - \varpi''') \\ -\ 1'',088395.\sin.(4n^{\text{IV}}t - 3n'''t + 4\varepsilon^{\text{IV}} - 3\varepsilon''' - \varpi^{\text{IV}}) \\ -\ 8'',853862.\sin.(2n'''t - n^{\text{IV}}t + 2\varepsilon''' - \varepsilon^{\text{IV}} - \varpi''') \\ -\ 0'',631233.\sin.(2n'''t - n^{\text{IV}}t + 2\varepsilon''' - \varepsilon^{\text{IV}} - \varpi^{\text{IV}}) \\ +\ 5'',719628.\sin.(3n'''t - 2n^{\text{IV}}t + 3\varepsilon''' - 2\varepsilon^{\text{IV}} - \varpi''') \\ +\ 0'',611530.\sin.(4n'''t - 3n^{\text{IV}}t + 4\varepsilon''' - 3\varepsilon^{\text{IV}} - \varpi''') \end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{\text{V}}).\left\{\begin{array}{l} 0'',443697.\sin.(n^{\text{V}}t + \varepsilon^{\text{V}} - \varpi''') \\ -2'',151005.\sin.(n^{\text{V}}t + \varepsilon^{\text{V}} - \varpi^{\text{V}}) \\ -5'',549601.\sin.(2n^{\text{V}}t - n'''t + 2\varepsilon^{\text{V}} - \varepsilon''' - \varpi''') \\ +0'',407952.\sin.(2n^{\text{V}}t - n'''t + 2\varepsilon^{\text{V}} - \varepsilon''' - \varpi^{\text{V}}) \\ -0'',309401.\sin.(3n^{\text{V}}t - 2n'''t + 3\varepsilon^{\text{V}} - 2\varepsilon''' - \varpi^{\text{V}}) \\ -0'',483901.\sin.(2n'''t - n^{\text{V}}t + 2\varepsilon''' - \varepsilon^{\text{V}} - \varpi''') \end{array}\right\};$$

$$\delta r''' = (1+\mu').\left\{\begin{array}{l} 0,0000044700.\cos.(2n'''t - n't + 2\varepsilon''' - \varepsilon' - \varpi''') \\ -0,0000009713.\cos.(2n'''t - n't + 2\varepsilon''' - \varepsilon' - \varpi') \end{array}\right\};$$

$$+(1+\mu'').\left\{\begin{array}{l}-0{,}0000022865.\cos.(n''t+\varepsilon''-\varpi''')\\+0{,}0000086337.\cos.(2n'''t-n''t+2\varepsilon'''-\varepsilon''-\varpi''')\\-0{,}0000031269.\cos.(2n'''t-n''t+2\varepsilon'''-\varepsilon''-\varpi'')\\-0{,}0000200331.\cos.(3n'''t-2n''t+3\varepsilon'''-2\varepsilon''-\varpi''')\\+0{,}0000025454.\cos.(3n'''t-2n''t+3\varepsilon'''-2\varepsilon''-\varpi'')\\+0{,}0000030863.\cos.(4n'''t-3n''t+4\varepsilon'''-3\varepsilon''-\varpi''')\\+0{,}0000040239.\cos.(4n'''t-3n''t+4\varepsilon'''-3\varepsilon''-\varpi'')\end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{\text{iv}}).\left\{\begin{array}{l}0{,}0000035825.\cos.(n'''t+\varepsilon'''-\varpi''')\\-0{,}0000107986.\cos.(n^{\text{iv}}t+\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi''')\\+0{,}0000031431.\cos.(n^{\text{iv}}t+\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi^{\text{iv}})\\-0{,}0000599470.\cos.(2n^{\text{iv}}t-n'''t+2\varepsilon^{\text{iv}}-\varepsilon'''-\varpi''')\\+0{,}0000069892.\cos.(2n^{\text{iv}}t-n'''t+2\varepsilon^{\text{iv}}-\varepsilon'''-\varpi^{\text{iv}})\\+0{,}0000114352.\cos.(3n^{\text{iv}}t-2n'''t+2\varepsilon^{\text{iv}}-2\varepsilon'''-\varpi''')\\-0{,}0000169741.\cos.(3n^{\text{iv}}t-2n'''t+3\varepsilon^{\text{iv}}-2\varepsilon'''-\varpi^{\text{iv}})\\-0{,}0000020307.\cos.(4n^{\text{iv}}t-3n'''t+4\varepsilon^{\text{iv}}-3\varepsilon'''-\varpi^{\text{iv}})\\+0{,}0000087307.\cos.(2n'''t-n^{\text{v}}t+2\varepsilon'''-\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi''')\\-0{,}0000063983.\cos.(3n'''t-2n^{\text{iv}}t+3\varepsilon'''-2\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi''')\end{array}\right\}$$

$$-(1+\mu^{\text{v}}).0{,}0000061906.\cos.(2n^{\text{v}}t-n'''t+2\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon'''-\varpi''').$$

Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites.

$$\delta v''' = -(1+\mu').21'',295121.\sin.(3n'''t-n't+3\varepsilon'''-\varepsilon'+72°,7083)$$

$$-(1+\mu'').\left\{\begin{array}{l}4'',365840.\sin.(3n'''t-n''t+3\varepsilon'''-\varepsilon''+81°,3318)\\+13'',490441.\sin.(4n'''t-2n''t+4\varepsilon'''-2\varepsilon''+75°,3518)\\+\ 8'',228086.\sin.(5n'''t-3n''t+5\varepsilon'''-3\varepsilon''+75°,9814)\end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{\text{iv}}).\left\{\begin{array}{l}-\ 1'',428330.\sin.(n^{\text{iv}}t+n'''t+\varepsilon^{\text{iv}}+\varepsilon'''-59°,0333)\\-\ 4'',457166.\sin.(2n^{\text{iv}}t+2\varepsilon^{\text{iv}}+66°,7969)\\+\ 3'',998174.\sin.(n^{\text{iv}}t-n'''t+\varepsilon^{\text{iv}}-\varepsilon'''+60°,7691)\end{array}\right\}$$

La dernière de ces inégalités peut être réunie à l'inégalité indépendante des excentricités

$$(1+\mu^{\text{iv}}).75'',434700.\sin.(n^{\text{iv}}t-n'''t+\varepsilon^{\text{iv}}-\varepsilon''');$$

leur somme donne l'inégalité

$$(1+\mu^{\text{iv}}).77'',813921.\sin.(n^{\text{iv}}t-n'''t+\varepsilon^{\text{iv}}-\varepsilon'''+2°,6702).$$

$$\delta r''' = -(1+\mu').0{,}0000023461.\cos.(3n'''t - n't + 3\varepsilon''' - \varepsilon' + 71°{,}9904)$$

$$+(1+\mu'').\begin{Bmatrix} 0{,}0000050403.\cos.(3n'''t - n''t + 3\varepsilon''' - \varepsilon'' + 80°{,}8704) \\ +0{,}0000070248.\cos.(4n'''t - 2n''t + 4\varepsilon''' - 2\varepsilon'' - 65°{,}4042) \\ -0{,}0000075032.\cos.(5n'''t - 3n''t + 5\varepsilon''' - 3\varepsilon'' + 76°0641) \end{Bmatrix}$$

$$+(1+\mu^{\text{iv}}).\begin{Bmatrix} 0{,}0000080002.\cos.(2n^{\text{iv}}t + 2\varepsilon^{\text{iv}} + 66°{,}9975) \\ +0{,}0000041488.\cos.(n^{\text{iv}}t - n'''t + \varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon''' + 65°{,}7214) \end{Bmatrix}.$$

La dernière de ces inégalités peut être réunie à l'inégalité indépendante des excentricités

$$(1+\mu^{\text{iv}}).0{,}0000784371.\cos.(n^{\text{iv}}t - n'''t + \varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon''');$$

leur somme donne l'inégalité

$$(1+\mu^{\text{iv}}).0{,}0000806432.\cos.(n^{\text{iv}}t - n'''t + \varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon''' + 2°{,}8133).$$

Les inégalités du mouvement de Mars en latitude, sont très-peu sensibles. En désignant par Π^{iv}, la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Jupiter sur celle de Mars, on trouve

$$\delta s''' = (1+\mu^{\text{iv}}).\begin{Bmatrix} 0'',291339.\sin.(n^{\text{iv}}t + \varepsilon^{\text{iv}} - \Pi^{\text{iv}}) \\ +1'',244657.\sin.(2n^{\text{iv}}t - n'''t + 2\varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon''' - \Pi^{\text{iv}}) \end{Bmatrix}.$$

CHAPITRE XII.

Théorie de Jupiter.

33. L'ATTRACTION réciproque des planètes entre elles et sur le soleil, est principalement sensible dans la théorie de Jupiter et de Saturne, et nous allons en voir naître les plus grandes inégalités du système planétaire. L'équation

$$\delta r''' = -\frac{r'''^2}{r''}.(1-\alpha^2).\delta V'''$$

trouvée dans le n°. précédent, relativement à Mars, devient pour Jupiter,

$$\delta r^{\text{iv}} = -\frac{r^{\text{iv}2}}{r''}.(1-\alpha^2).\delta V^{\text{iv}}.$$

Si l'on prend pour r'' et r^{iv}, les moyennes distances de la Terre et de Jupiter au Soleil; et si l'on suppose $\delta V^{\text{iv}} = \pm 1''$, on aura

$$\delta r^{\text{iv}} = \mp 0{,}0000409225;$$

on peut ainsi négliger les inégalités de δr^{iv} au-dessous de $\mp 0{,}000041$. Nous négligerons les inégalités du mouvement de Jupiter en longitude et en latitude, au-dessous d'un quart de seconde.

Inégalités de Jupiter indépendantes des excentricités.

$$\delta v^{\text{iv}} = (1+\mu'').\left\{\begin{array}{l} 0'',372941.\sin.(n''t - n^{\text{iv}}t + \varepsilon'' - \varepsilon^{\text{iv}}) \\ -0'',000266.\sin.2.(n''t - n^{\text{iv}}t + \varepsilon'' - \varepsilon^{\text{iv}}) \end{array}\right\},$$

$$+(1+\mu^{\text{v}}).\left\{\begin{array}{l} 255'',591700.\sin.(n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + \varepsilon^{\text{v}} - \varepsilon^{\text{iv}}) \\ -630'',883870.\sin.2.(n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + \varepsilon^{\text{v}} - \varepsilon^{\text{iv}}) \\ -\ 52'',690013.\sin.3.(n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + \varepsilon^{\text{v}} - \varepsilon^{\text{iv}}) \\ -\ 12'',118299.\sin.4.(n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + \varepsilon^{\text{v}} - \varepsilon^{\text{iv}}) \\ -\ 3'',736337.\sin.5.(n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + \varepsilon^{\text{v}} - \varepsilon^{\text{iv}}) \\ -\ 1'',322283.\sin.6.(n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + \varepsilon^{\text{v}} - \varepsilon^{\text{iv}}) \\ -\ 0'',527541.\sin.7.(n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + \varepsilon^{\text{v}} - \varepsilon^{\text{iv}}) \\ -\ 0'',234833.\sin.8.(n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + \varepsilon^{\text{v}} - \varepsilon^{\text{iv}}) \\ -\ 0'',127385.\sin.9.(n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + \varepsilon^{\text{v}} - \varepsilon^{\text{iv}}) \end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{\text{vi}}).$$

$$+(1+\mu^{\text{vi}}).\left\{\begin{array}{l}3'',246102.\sin.2.(n^{\text{vi}}t-n^{\text{iv}}t+\varepsilon^{\text{vi}}-\varepsilon^{\text{iv}})\\-1'',318815.\sin.2.(n^{\text{vi}}t-n^{\text{iv}}t+\varepsilon^{\text{vi}}-\varepsilon^{\text{iv}})\\-0'',136065.\sin.3.(n^{\text{vi}}t-n^{\text{iv}}t+\varepsilon^{\text{vi}}-\varepsilon^{\text{iv}})\\-0'',018447.\sin.4.(n^{\text{vi}}t-n^{\text{iv}}t+\varepsilon^{\text{vi}}-\varepsilon^{\text{iv}})\end{array}\right\};$$

$$\delta r^{\text{iv}}=(1+\mu^{\text{v}}).\left\{\begin{array}{l}-0,0000620586\\+0,0006768760.\cos.(n^{\text{v}}t-n^{\text{iv}}t+\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon^{\text{iv}})\\-0,0028966200.\cos.2.(n^{\text{v}}t-n^{\text{iv}}t+\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon^{\text{iv}})\\-0,0003021367.\cos.3.(n^{\text{v}}t-n^{\text{iv}}t+\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon^{\text{iv}})\\-0,0000782514.\cos.4.(n^{\text{v}}t-n^{\text{iv}}t+\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon^{\text{iv}})\\-0,0000258952.\cos.5.(n^{\text{v}}t-n^{\text{iv}}t+\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon^{\text{iv}})\\-0,0000094779.\cos.6.(n^{\text{v}}t-n^{\text{iv}}t+\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon^{\text{iv}})\\-0,0000037560.\cos.7.(n^{\text{v}}t-n^{\text{iv}}t+\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon^{\text{iv}})\\-0,0000014781.\cos.8.(n^{\text{v}}t-n^{\text{iv}}t+\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon^{\text{iv}})\\-0,0000004799.\cos.9.(n^{\text{v}}t-n^{\text{iv}}t+\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon^{\text{iv}})\end{array}\right\}.$$

Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.

Plusieurs de ces inégalités étant considérables, il importe d'avoir les variations de leurs coëfficiens : nous allons donner celles des coëfficiens qui surpassent cent secondes dans l'expression de δv^{iv}. Les coëfficiens des inégalités dépendantes de ϖ^{iv}, ont e^{iv} pour multiplicateur; en nommant donc Ae^{iv} l'un de ces coëfficiens, sa variation sera $Ae^{\text{iv}}.\frac{\delta e^{\text{iv}}}{e^{\text{iv}}}$; et l'on verra dans la suite, qu'en ayant égard aux quantités dépendantes du carré de la force perturbatrice, et dont nous avons donné les expressions analytiques dans le n°. 13, on a

$$\delta e^{\text{iv}}=t.1'',016936.$$

Pareillement, les coëfficiens des inégalités dépendantes de ϖ^{v}, ont e^{v} pour multiplicateur; en nommant donc Be^{v} l'un de ces coëfficiens, sa variation sera $Be^{\text{v}}.\frac{\delta e^{\text{v}}}{e^{\text{v}}}$, et l'on verra dans la suite, que

$$\delta e^{\text{v}}=-t.1'',984469.$$

Cela posé, on trouve

$$\delta v^{\text{iv}} = (1+\mu^{\text{v}}).\left\{\begin{array}{l}
26'',569412.\sin.(n^{\text{v}}t+\varepsilon^{\text{v}}-\varpi^{\text{iv}}) \\
-29'',914770.\sin.(n^{\text{v}}t+\varepsilon^{\text{v}}-\varpi^{\text{v}}) \\
-(427'',078201+t.0'',0141929).\sin.(2n^{\text{v}}t-n^{\text{iv}}t+2\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi^{\text{iv}}) \\
+(174'',796601-t.0'',0096906).\sin.(2n^{\text{v}}t-n^{\text{iv}}t+2\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi^{\text{v}}) \\
-(137'',224760+t.0'',0045603).\sin.(3n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+3\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi^{\text{iv}}) \\
+(262'',168424-t.0'',0145351).\sin.(3n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+3\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi^{\text{v}}) \\
+24'',460840.\sin.(4n^{\text{v}}t-3n^{\text{iv}}t+4\varepsilon^{\text{v}}-3\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi^{\text{iv}}) \\
-48'',239570.\sin.(4n^{\text{v}}t-3n^{\text{iv}}t+4\varepsilon^{\text{v}}-3\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi^{\text{v}}) \\
+\ 3'',233695.\sin.(5n^{\text{v}}t-4n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-4\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi^{\text{iv}}) \\
-\ 8'',585382.\sin.(5n^{\text{v}}t-4n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-4\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi^{\text{v}}) \\
+\ 1'',256948.\sin.(6n^{\text{v}}t-5n^{\text{iv}}t+6\varepsilon^{\text{v}}-5\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi^{\text{iv}}) \\
-\ 2'',818833.\sin.(6n^{\text{v}}t-5n^{\text{iv}}t+6\varepsilon^{\text{v}}-5\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi^{\text{v}}) \\
+\ 0'',460731.\sin.(7n^{\text{v}}t-6n^{\text{iv}}t+7\varepsilon^{\text{v}}-6\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi^{\text{iv}}) \\
-\ 1'',004913.\sin.(7n^{\text{v}}t-6n^{\text{iv}}t+7\varepsilon^{\text{v}}-6\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi^{\text{v}}) \\
-16'',074450.\sin.(2n^{\text{iv}}t-n^{\text{v}}t+2\varepsilon^{\text{iv}}-\varepsilon^{\text{v}}-\varpi^{\text{iv}}) \\
-\ 1'',758450.\sin.(2n^{\text{iv}}t-n^{\text{v}}t+2\varepsilon^{\text{iv}}-\varepsilon^{\text{v}}-\varpi^{\text{v}}) \\
+39'',742746.\sin.(3n^{\text{iv}}t-2n^{\text{v}}t+3\varepsilon^{\text{iv}}-2\varepsilon^{\text{v}}-\varpi^{\text{iv}}) \\
-\ 1'',087650.\sin.(3n^{\text{iv}}t-2n^{\text{v}}t+3\varepsilon^{\text{iv}}-2\varepsilon^{\text{v}}-\varpi) \\
+\ 3'',973709.\sin.(4n^{\text{iv}}t-3n^{\text{v}}t+4\varepsilon^{\text{iv}}-3\varepsilon^{\text{v}}-\varpi^{\text{iv}}) \\
-\ 0'',533617.\sin.(4n^{\text{iv}}t-3n^{\text{v}}t+4\varepsilon^{\text{iv}}-3\varepsilon^{\text{v}}-\varpi^{\text{v}}) \\
+\ 1'',100702.\sin.(5n^{\text{iv}}t-4n^{\text{v}}t+5\varepsilon^{\text{iv}}-4\varepsilon^{\text{v}}-\varpi^{\text{iv}}) \\
-\ 0'',256755.\sin.(5n^{\text{iv}}t-4n^{\text{v}}t+5\varepsilon^{\text{iv}}-4\varepsilon^{\text{v}}-\varpi^{\text{v}})
\end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{\text{vi}}).\left\{\begin{array}{l}
0'',381191.\sin.(n^{\text{vi}}t+\varepsilon^{\text{vi}}-\varpi^{\text{iv}}) \\
-0'',726050.\sin.(n^{\text{vi}}t+\varepsilon^{\text{vi}}-\varpi^{\text{vi}}) \\
-1'',645307.\sin.(2n^{\text{vi}}t-n^{\text{iv}}t+2\varepsilon^{\text{vi}}-\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi^{\text{iv}}) \\
+0'',316891.\sin.(2n^{\text{vi}}t-n^{\text{iv}}t+2\varepsilon^{\text{vi}}-\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi^{\text{vi}}) \\
-0'',394947.\sin.(3n^{\text{vi}}t-2n^{\text{iv}}t+3\varepsilon^{\text{vi}}-2\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi^{\text{vi}})
\end{array}\right\};$$

$$\delta r^{\text{iv}} = (1+\mu^{\text{v}}).\left\{\begin{array}{l}
0,0000206111.\cos.(n^{\text{iv}}t+\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi^{\text{iv}}) \\
-0,0000795246.\cos.(n^{\text{v}}t+\varepsilon^{\text{v}}-\varpi^{\text{iv}}) \\
+0,0000492096.\cos.(n^{\text{v}}t+\varepsilon^{\text{v}}-\varpi^{\text{v}}) \\
-0,0002922130.\cos.(2n^{\text{v}}t-n^{\text{iv}}t+2\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi^{\text{iv}}) \\
+0,0001688085.\cos.(2n^{\text{v}}t-n^{\text{iv}}t+2\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi^{\text{v}}) \\
-0,0004584483.\cos.(3n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+3\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi^{\text{iv}}) \\
+0,0009047822.\cos.(3n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+3\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi^{\text{v}}) \\
+0,0001259429.\cos.(4n^{\text{v}}t-3n^{\text{iv}}t+4\varepsilon^{\text{v}}-3\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi^{\text{iv}}) \\
-0,0002424413.\cos.(4n^{\text{v}}t-3n^{\text{iv}}t+4\varepsilon^{\text{v}}-3\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi^{\text{v}}) \\
+0,0000268383.\cos.(5n^{\text{v}}t-4n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-4\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi^{\text{iv}}) \\
-0,0000516048.\cos.(5n^{\text{v}}t-4n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-4\varepsilon^{\text{iv}}-\varpi^{\text{v}}) \\
+0,0000579151.\cos.(2n^{\text{iv}}t-n^{\text{v}}t+2\varepsilon^{\text{iv}}-\varepsilon^{\text{v}}-\varpi^{\text{iv}}) \\
-0,0001346530.\cos.(3n^{\text{iv}}t-2n^{\text{v}}t+3\varepsilon^{\text{iv}}-2\varepsilon^{\text{v}}-\varpi^{\text{iv}})
\end{array}\right\}.$$

Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons.

$$\delta v^{\text{iv}}=(1+\mu^{\text{v}}).\left\{\begin{array}{l} 3'',097780.\sin.(n^{\text{v}}t+n^{\text{iv}}t+\varepsilon^{\text{v}}+\varepsilon^{\text{iv}}+50^{\circ},5438) \\ -17'',218232.\sin.(2n^{\text{v}}t+2\varepsilon^{\text{v}}+17^{\circ},7111) \\ +36'',185942.\sin.(3n^{\text{v}}t-n^{\text{iv}}t+3\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon^{\text{iv}}+88^{\circ},5148) \\ -55'',787912.\sin.(4n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+4\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}}-63^{\circ},5635) \\ +(522'',425601-t.0'',013202).\sin.\left(\begin{array}{l}3n^{\text{iv}}t-5n^{\text{v}}t+3\varepsilon^{\text{iv}}-5\varepsilon^{\text{v}} \\ +61^{\circ},8669+t.155'',89\end{array}\right) \\ +\ 5'',083765.\sin.(6n^{\text{v}}t-4n^{\text{iv}}t+6\varepsilon^{\text{v}}-4\varepsilon^{\text{iv}}-60^{\circ},4778) \\ +\ 7'',643221.\sin.(n^{\text{v}}t-n^{\text{iv}}t+\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon^{\text{iv}}+48^{\circ},0929) \\ -19'',407399.\sin.(2n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+2\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}}+47^{\circ},4210) \end{array}\right\}.$$

Ces deux dernières inégalités réunies aux deux suivantes,

$$(1+\mu^{\text{v}}).\left\{\begin{array}{l} 255'',591700.\sin.(n^{\text{v}}t-n^{\text{iv}}t+\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon^{\text{iv}}) \\ -630'',883870.\sin.2.(n^{\text{v}}t-n^{\text{iv}}t+\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon^{\text{iv}}) \end{array}\right\}$$

que nous avons trouvées précédemment, et qui sont indépendantes des excentricités, donnent celles-ci,

$$(1+\mu^{\text{v}}).\left\{\begin{array}{l} -261'',200420.\sin.(n^{\text{iv}}t-n^{\text{v}}t+\varepsilon^{\text{iv}}-\varepsilon^{\text{v}}-1^{\circ},2756) \\ +645'',364888.\sin.(2n^{\text{iv}}t-2n^{\text{v}}t+2\varepsilon^{\text{iv}}-2\varepsilon^{\text{v}}-1^{\circ},2957) \end{array}\right\}.$$

On a ensuite,

$$\delta r^{\text{iv}}=(1+\mu^{\text{v}}).\left\{\begin{array}{l} 0,0000822415.\cos.(2n^{\text{v}}t+2\varepsilon^{\text{v}}+12^{\circ},2392) \\ +0,0000226252\ \cos.(3n^{\text{v}}t-n^{\text{iv}}t+3\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon^{\text{iv}}-24^{\circ},2093) \\ -0,0001010533.\cos.(4n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+4\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}}-56^{\circ},7419) \\ -(0,0021114502-t.0,00000005323).\cos.\left(\begin{array}{l}3n^{\text{iv}}t-5n^{\text{v}}t+3\varepsilon^{\text{iv}}-5\varepsilon^{\text{v}} \\ +61^{\circ},7749+t.155'',60\end{array}\right) \\ -0,0000652204.\cos.(2n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+2\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon^{\text{iv}}+60^{\circ},1641) \end{array}\right\}.$$

En réunissant la dernière de ces inégalités à la suivante,

$$-(1+\mu^{\text{v}}).0,0028966200.\cos.2(n^{\text{v}}t-n^{\text{iv}}t+\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon^{\text{iv}}),$$

que nous avons trouvée précédemment, et qui est indépendante des excentricités ; on a celle-ci,

$$-(1+\mu^{\text{v}}).0,0029251892.\cos.(2n^{\text{iv}}t-2n^{\text{v}}t+2\varepsilon^{\text{iv}}-2\varepsilon^{\text{v}}-1^{\circ},1506).$$

Les inégalités précédentes de δv^{iv} ont été calculées par les for-

mules (A), (C), (E) et (F) des nos 1 et 2, à l'exception de l'inégalité dépendante de l'angle $3n^{\text{iv}}t - 5n^{\text{v}}t$: $5n^{\text{v}} - 2n^{\text{iv}}$ étant un coëfficient très-petit en vertu du rapport qui existe entre les moyens mouvemens de Jupiter et de Saturne, l'angle $3n^{\text{iv}}t - 5n^{\text{v}}t$ diffère très-peu de $n^{\text{iv}}t$; on a donc fait usage, pour calculer cette inégalité, des formules (B) et (C) du nº 1, et de la méthode du nº 18.

Inégalités dépendantes du cube et des produits de trois et de cinq dimensions, des excentricités et des inclinaisons des orbites, ainsi que du carré de la force perturbatrice.

La grande inégalité de Jupiter a été calculée par les formules des nos 7, 8, 9, 13, 14, 15, 16 et 17. On a trouvé par le nº 8,

$$a^{\text{v}}.M^{(0)} = -5{,}2439100.m^{\text{v}};$$
$$a^{\text{v}}.M^{(1)} = 9{,}6074688.m^{\text{v}};$$
$$a^{\text{v}}.M^{(2)} = -5{,}8070750.m^{\text{v}};$$
$$a^{\text{v}}.M^{(3)} = 1{,}1620283.m^{\text{v}};$$
$$a^{\text{v}}.M^{(4)} = -0{,}6385781.m^{\text{v}};$$
$$a^{\text{v}}.M^{(5)} = 0{,}3320740.m^{\text{v}}.$$

De-là on a conclu pour 1750,

$$a^{\text{v}}.P = 0{,}0001093026;$$
$$a^{\text{v}}.P' = -0{,}0010230972.$$

On a déterminé ces valeurs pour 2250, et pour 2750. Pour cela, il a été nécessaire de déterminer les valeurs de e^{iv}, e^{v}, ϖ^{iv}, ϖ^{v}, γ et Π, en séries ordonnées par rapport aux puissances du temps, en portant la précision jusqu'au carré du temps. On a d'abord calculé par les formules du nº 13, les variations séculaires de δe^{iv}, δe^{v}, $\delta\varpi^{\text{iv}}$ et $\delta\varpi^{\text{v}}$, dépendantes du carré de la force perturbatrice, et l'on a trouvé pour ces variations,

$$\delta e^{\text{iv}} = t.\ 0'',161352;$$
$$\delta\varpi^{\text{iv}} = t.\ 1'',089325;$$
$$\delta e^{\text{v}} = -t.\ 0'',317171;$$
$$\delta\varpi^{\text{v}} = t.\ 10'',008401.$$

Les coëfficiens de t, dans ces expressions, sont les parties de $\frac{de^{\text{iv}}}{dt}$,

$\frac{d\varpi^{\text{IV}}}{dt}$, $\frac{de^{\text{V}}}{dt}$, $\frac{d\varpi^{\text{V}}}{dt}$, dépendantes du carré de la force perturbatrice : il faut les ajouter aux valeurs des mêmes quantités déterminées dans le n° 25 ; ce qui donne pour ces valeurs entières en 1750,

$$\frac{de^{\text{IV}}}{dt} = \quad 1'',016936 ;$$
$$\frac{d\varpi^{\text{IV}}}{dt} = \quad 21'',459284 ;$$
$$\frac{de^{\text{V}}}{dt} = - \; 1'',984469 ;$$
$$\frac{d\varpi^{\text{V}}}{dt} = \quad 59'',739037.$$

On a déterminé par le même procédé, ces valeurs pour 1950, et l'on a trouvé pour cette époque,

$$\frac{de^{\text{IV}}}{dt} = \quad 1'',006705 ;$$
$$\frac{d\varpi^{\text{IV}}}{dt} = \quad 21'',769069 ;$$
$$\frac{de^{\text{V}}}{dt} = - \; 2'',001540 ;$$
$$\frac{d\varpi^{\text{V}}}{dt} = \quad 59'',952898.$$

De-là on a conclu par le n° 8, les expressions suivantes de e^{IV}, ϖ^{IV}, e^{V}, ϖ^{V}, pour un temps quelconque t,

$$e^{\text{IV}} = e^{\text{IV}} + t. \; 1'',016936 - t^2.0'',0000255775 ;$$
$$\varpi^{\text{IV}} = \varpi^{\text{IV}} + t.21'',459284 + t^2.0'',0007744625 ;$$
$$e^{\text{V}} = e^{\text{V}} - t. \; 1'',984469 - t^2.0'',0000426775 ;$$
$$\varpi^{\text{V}} = \varpi^{\text{V}} + t.59'',739037 + t^2.0'',0005346525 ;$$

les valeurs de e^{IV}, ϖ^{IV}, e^{V}, ϖ^{V} dans les seconds membres de ces équations, étant celles de 1750.

On a déterminé les valeurs de γ et de Π, au moyen des équations

$$\varphi^{\text{V}}.\sin.\theta^{\text{V}} - \varphi^{\text{IV}}.\sin.\theta^{\text{IV}} = \gamma.\sin.\Pi ;$$
$$\varphi^{\text{V}}.\cos.\theta^{\text{V}} - \varphi^{\text{IV}}.\cos.\theta^{\text{IV}} = \gamma.\cos.\Pi.$$

Ensuite on a déterminé les valeurs de $\frac{d\gamma}{dt}$ et de $\frac{d\Pi}{dt}$, au moyen des

différentielles de ces équations, en y substituant pour $\frac{d\phi^{iv}}{dt}$, $\frac{d\phi^{v}}{dt}$, $\frac{d\theta^{iv}}{dt}$, $\frac{d\theta^{v}}{dt}$, leurs valeurs données dans le n° 25. On a trouvé de cette manière pour 1750,

$$\gamma = 1°,3982;$$
$$\Pi = 139°,7142;$$
$$\frac{d\Pi}{dt} = -80'',537447;$$
$$\frac{d\gamma}{dt} = -0'',000326.$$

Les formules du n° 14 donnent pour les variations séculaires de γ et de Π, dépendantes du carré de la force perturbatrice,

$$\delta\gamma = t.0'',000568;$$
$$\delta\Pi = -t.0'',023552.$$

En ajoutant les coëfficiens de t dans ces équations, aux valeurs précédentes de $\frac{d\gamma}{dt}$ et de $\frac{d\Pi}{dt}$, on aura pour les valeurs complètes de ces quantités en 1750,

$$\frac{d\gamma}{dt} = 0'',000242;$$
$$\frac{d\Pi}{dt} = -80'',560999.$$

On a trouvé par le même procédé pour 1950,

$$\frac{d\gamma}{dt} = -0'',004589;$$
$$\frac{d\Pi}{dt} = -81'',487827.$$

De-là on a conclu par le n°. 8, pour un temps quelconque t,

$$\gamma = \gamma + t.\ 0'',000242 - t^2.0'',0000120775;$$
$$\Pi = \Pi - t.80'',560999 - t^2.0'',0023170701;$$

les valeurs de γ et de Π, dans les seconds membres de ces équations, étant celles de 1750. Cela posé, on a trouvé pour 2250,

$$a^{v}.P = -0,000080189;$$
$$a^{v}.P' = -0,001006510;$$

et pour 2750.

$$a^{\text{v}}P = -0{,}000260997\,;$$
$$a^{\text{v}}P' = -0{,}000954603\,;$$

d'où l'on a conclu par le n° 8,

$$a^{\text{v}}.\frac{dP}{dt} = -0{,}000000387666\,;$$
$$a^{\text{v}}.\frac{dP'}{dt} = -0{,}000000002145\,;$$
$$a^{\text{v}}.\frac{ddP}{dt^2} = 0{,}00000000034734\,;$$
$$a^{\text{v}}.\frac{ddP'}{dt^2} = 0{,}00000000141780.$$

La partie de δv^{iv} donnée dans le n°. 17,

$$-\frac{6m^{\text{v}}.n^{\text{iv}\,2}}{(5n^{\text{v}}-2n^{\text{iv}})^2}.\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}a^{\text{iv}}.P'+\dfrac{2a^{\text{iv}}.dP}{(5n^{\text{v}}-2n^{\text{iv}}).dt}-\dfrac{3a^{\text{iv}}.ddP'}{(5n^{\text{v}}-2n^{\text{iv}})^2.dt^2}\\ +t.\left\{a^{\text{iv}}.\dfrac{dP'}{dt}+\dfrac{2a^{\text{iv}}.ddP}{(5n^{\text{v}}-2n^{\text{iv}}).dt^2}\right\}+\frac{1}{2}t^2.a^{\text{iv}}.\dfrac{ddP'}{dt^2}\end{array}\right\}.\sin.(5n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}})\\ -\left\{\begin{array}{l}a^{\text{iv}}.P-\dfrac{2a^{\text{iv}}.dP'}{(5n^{\text{v}}-2n^{\text{iv}}).dt}-\dfrac{3a^{\text{iv}}.ddP}{(5n^{\text{v}}-2n^{\text{iv}})^2.dt^2}\\ +t.\left\{a^{\text{iv}}.\dfrac{dP}{dt}-\dfrac{2a^{\text{iv}}.ddP'}{(5n^{\text{v}}-2n^{\text{iv}}).dt^2}\right\}+\frac{1}{2}t^2.a^{\text{iv}}.\dfrac{ddP}{dt^2}\end{array}\right\}.\cos.(5n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}})\end{array}\right\};$$

devient ainsi, en la réduisant en nombres,

$$(3900'',616270-t.0'',025982-t^2.0'',000059403).\sin.(5n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}})$$
$$+(368'',910343-t.1'',461994+t^2\ 0'',000242476).\cos.(5n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}}).$$

La grande inégalité de Jupiter se compose de plusieurs autres parties : elle renferme encore, par le n° 8, la fonction

$$-\frac{2m^{\text{v}}.n^{\text{iv}}}{5n^{\text{v}}-2n^{\text{iv}}}.\left\{\begin{array}{l}a^{\text{iv}\,2}.\left(\dfrac{dP}{da^{\text{iv}}}\right).\cos.(5n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}})\\ -a^{\text{iv}\,2}.\left(\dfrac{dP'}{da^{\text{iv}}}\right).\sin.(5n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}})\end{array}\right\}.$$

Pour la réduire en nombres, il faut calculer les valeurs de $a^{\text{v}\,2}.\left(\frac{dM^{(0)}}{da^{\text{iv}}}\right)$; $a^{\text{v}\,2}.\left(\frac{dM^{(1)}}{da^{\text{iv}}}\right)$, &c. On a trouvé

$$a^{v\,2}.\left(\frac{dM^{(0)}}{da^{iv}}\right) = -26,46390.m^{v};$$

$$a^{v\,2}.\left(\frac{dM^{(1)}}{da^{iv}}\right) = 65,75870.m^{v};$$

$$a^{v\,2}.\left(\frac{dM^{(2)}}{da^{iv}}\right) = -50,22714.m^{v};$$

$$a^{v\,2}.\left(\frac{dM^{(3)}}{da^{iv}}\right) = 12,14696.m^{v};$$

$$a^{v\,2}.\left(\frac{dM^{(4)}}{da^{iv}}\right) = -6,75963.m^{v};$$

$$a^{v\,2}.\left(\frac{dM^{(5)}}{da^{iv}}\right) = 4,13173.m^{v}.$$

On a conclu de ces valeurs, celles de $a^{v\,2}.\left(\frac{dM^{(0)}}{da^{v}}\right)$, $a^{v\,2}.\left(\frac{dM^{(1)}}{da^{v}}\right)$, &c. qui sont nécessaires dans la théorie de Saturne, au moyen de l'équation générale,

$$a^{v}.\left(\frac{dM^{(i)}}{da^{v}}\right) + a^{iv}.\left(\frac{dM^{(i)}}{da^{iv}}\right) = -M^{(i)}.$$

On a trouvé ensuite pour 1750,

$$-\frac{2m^{v}.n^{iv}}{5n^{v}-2n^{iv}}.\left\{\begin{array}{l} a^{iv\,2}.\left(\frac{dP}{da^{iv}}\right).\cos.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv}) \\ -a^{iv\,2}.\left(\frac{dP'}{da^{iv}}\right).\sin.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv}) \end{array}\right\}$$

$$= -53'',175501.\sin.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv})$$
$$+16'',543260.\cos.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv});$$

et pour 1950, on a trouvé cette fonction égale à

$$-51'',965436.\sin.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv})$$
$$+19'',906909.\cos.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv});$$

d'où l'on a conclu la valeur de cette fonction pour un temps quelconque t, égale à

$$-(53'',175501 - t.0'',0060503).\sin.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv})$$
$$+(16'',543260 + t.0'',0168182).\cos.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv}).$$

La grande inégalité de Jupiter renferme encore par le n°. 8, le terme

$$-\frac{e^{iv}.H}{2}.\sin.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv}-\varpi^{iv}+A);$$

ce

ce terme, en 1750, étoit égal à

$$2'',531758.\sin.(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv})$$
$$-5'',672724.\cos.(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv});$$

et en 1950, il sera égal à

$$2'',165507.\sin.(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv})$$
$$-5'',681970.\cos.(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv});$$

d'où l'on a conclu pour un temps quelconque t, ce terme égal à

$$(2'',531758 - t.0'',0018310).\sin.(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv})$$
$$-(5'',672724 + t.0'',0000460).\cos.(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv}).$$

Pour déterminer la partie de la grande inégalité de Jupiter, dépendante des produits de cinq dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites, on a déterminé par le n°. 8, les valeurs de $N^{(0)}$, $N^{(1)}$, &c. pour les deux époques de 1750 et de 1950; et l'on a trouvé,

En 1750.	*En 1950.*
$a^{v}.N^{(0)} = -\ 0,00000135044$;	$a^{v}.N^{(0)} = -\ 0,00000129983$;
$a^{v}.N^{(1)} = -\ 0,00000789719$;	$a^{v}.N^{(1)} = -\ 0,00000754771$;
$a^{v}.N^{(2)} = \ 0,0000198552$;	$a^{v}.N^{(2)} = \ 0,0000196012$;
$a^{v}.N^{(3)} = -\ 0,0000175127$;	$a^{v}.N^{(3)} = -\ 0,0000172415$;
$a^{v}.N^{(4)} = \ 0,0000066540$;	$a^{v}.N^{(4)} = \ 0,0000066551$;
$a^{v}.N^{(5)} = -\ 0,0000009277$;	$a^{v}.N^{(5)} = -\ 0,0000009408$;
$a^{v}.N^{(6)} = -\ 0,0000003618$;	$a^{v}.N^{(6)} = -\ 0,0000003562$;
$a^{v}.N^{(7)} = -\ 0,0000003643$;	$a^{v}.N^{(7)} = -\ 0,0000003460$;
$a^{v}.N^{(8)} = \ 0,0000001720$;	$a^{v}.N^{(8)} = \ 0,0000001712$;
$a^{v}.N^{(9)} = -\ 0,0000000730$.	$a^{v}.N^{(9)} = -\ 0.0000000732$.

De-là on a conclu l'inégalité correspondante relative à Saturne, que nous donnerons ci-après, et en la multipliant par le facteur $-\frac{m^{v}\sqrt{a^{v}}}{m^{iv}\sqrt{a^{iv}}}$, on a obtenu l'inégalité suivante de Jupiter,

$$(38'',692571 - t.0'',005418).\sin.(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv})$$
$$-(25'',064701 + t.0'',015076).\cos.(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv}).$$

Enfin on a déterminé par le n°. 16 la partie sensible de la grande

inégalité de Saturne, dépendante du carré de la force perturbatrice, et l'on en a conclu celle de Jupiter, en la multipliant par $-\frac{m^{v}.\sqrt{a^{v}}}{m^{iv}.\sqrt{a^{iv}}}$, ce qui donne pour cette dernière inégalité,

$$(5'',066862 - t.0'',0144693).\sin.(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv})$$
$$-(56'',981339 + t.0'',0046755).\cos.(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv}).$$

Maintenant, si l'on rassemble ces diverses parties de la grande inégalité de Jupiter, on aura pour sa valeur entière,

$$(1+\mu^{v}).\left\{\begin{matrix}(3893'',731960 - t.0'',041650 - t^{2}.0'',000059403).\sin.(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv})\\+(297'',734839 - t.1'',464973 + t^{2}.0'',00024248).\cos.(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv})\end{matrix}\right\}.$$

En réduisant ces deux termes en un seul par la méthode du n°. 17, on aura

$$(1+\mu^{v}).(3905'',098090 - t.0'',114476 + t^{2}.0'',000113175).\sin.\left\{\begin{matrix}5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv} + 4^{\circ},85\\-t.239'',669 + t^{2}.0'',03883\end{matrix}\right.$$

Cette inégalité peut avoir besoin de correction; soit à raison du coëfficient μ^{v}, ou de la masse de Saturne; soit à raison du diviseur $(5n^{v} - 2n^{iv})^{2}$: une suite nombreuse d'observations lèvera ces légères incertitudes. Il faut, comme on l'a vu dans le n°. 17, appliquer cette grande inégalité au moyen mouvement de Jupiter.

Le carré de la force perturbatrice produit encore, par le n°. 12, l'inégalité

$-\frac{\overline{H}^{2}}{8}.\frac{(2m^{v}.\sqrt{a^{v}} + 5m^{iv}.\sqrt{a^{iv}})}{m^{v}.\sqrt{a^{v}}}.\sin.$ (double argument de la grande inégalité);

ce qui donne

$-40'',860794.\sin.$ (double argument de la grande inégalité).

Il faut encore appliquer au moyen mouvement de Jupiter, cette inégalité à longue période.

L'inégalité

$$\frac{1}{4}.\frac{(5m^{iv}.\sqrt{a^{iv}} + 4m^{v}.\sqrt{a^{v}})}{m^{v}.\sqrt{a^{v}}}.\overline{H}.K.\sin.(5n^{iv}t - 10n^{v}t + 5\varepsilon - 10\varepsilon^{v} - B - \overline{A})$$

trouvée dans le n°. 13, donne, en la réduisant en nombres,

$$12'',422071.\sin.(5n^{iv}t - 10n^{v}t + 5\varepsilon^{iv} - 10\varepsilon^{v} + 57^{\circ},0725).$$

On a encore par le n°. 8, l'inégalité

$$\tfrac{5}{4}.e^{\text{iv}}.K.\sin.(5n^{\text{v}}t - 4n^{\text{iv}}t + 5\varepsilon^{\text{v}} - 4\varepsilon^{\text{iv}} + \varpi^{\text{iv}} + B).$$

Cette inégalité réduite en nombres, donne

$$31'',125493.\sin.(4n^{\text{iv}}t - 5n^{\text{v}}t + 4\varepsilon^{\text{iv}} - 5\varepsilon^{\text{v}} + 50°,4025),$$

en la réunissant aux deux inégalités

$$3'',387695.\sin.(5n^{\text{v}}t - 4n^{\text{iv}}t + 5\varepsilon^{\text{v}} - 4\varepsilon^{\text{iv}} - \varpi^{\text{iv}})$$
$$- 8'',585382.\sin.(5n^{\text{v}}t - 4n^{\text{iv}}t + 5\varepsilon^{\text{v}} - 4\varepsilon^{\text{iv}} - \varpi^{\text{v}}),$$

que nous avons trouvées précédemment, on aura l'inégalité

$$(1+\mu^{\text{v}}).35'',512932.\sin.(4n^{\text{iv}}t - 5n^{\text{v}}t + 4\varepsilon^{\text{iv}} - 5\varepsilon^{\text{v}} + 64°,4555).$$

On a vu dans le n°. 5, que l'expression de $d\delta v^{\text{iv}}$ renferme une inégalité séculaire dépendante de l'équation

$$\frac{d.\delta v^{\text{iv}}}{dt} = \frac{m^{\text{v}}.n^{\text{iv}}}{8}.(h^{\text{iv}\,2} + l^{\text{iv}\,2}).\left\{2a^{\text{iv}\,2}.\left(\frac{dA^{(0)}}{da^{\text{iv}}}\right) + 7.a^{\text{iv}\,3}.\left(\frac{ddA^{(0)}}{da^{\text{iv}\,2}}\right) + 2a^{\text{iv}\,4}.\left(\frac{d^3A^{(0)}}{da^{\text{iv}\,3}}\right)\right\}$$
$$+ \frac{m^{\text{v}}.n^{\text{iv}}}{4}.(h^{\text{v}\,2} + l^{\text{v}\,2}).\left\{2a^{\text{iv}\,2}.\left(\frac{dA^{(0)}}{da^{\text{v}}}\right) + 4.a^{\text{iv}\,3}.\left(\frac{ddA^{(0)}}{da^{\text{iv}\,2}}\right) + a^{\text{iv}\,4}.\left(\frac{d^3A^{(0)}}{da^{\text{iv}\,2}}\right)\right\}$$
$$- \frac{m^{\text{v}}.n^{\text{iv}}}{8}.(h^{\text{iv}}h^{\text{v}} + l^{\text{iv}}l^{\text{v}}).\left\{2a^{\text{iv}}.A^{(1)} - 2a^{\text{iv}\,2}.\left(\frac{dA^{(1)}}{da^{\text{iv}}}\right) + 15.a^{\text{iv}\,3}.\left(\frac{ddA^{(1)}}{da^{\text{iv}\,2}}\right) + 4a^{\text{iv}\,4}.\left(\frac{d^3A^{(1)}}{da^{\text{iv}\,3}}\right)\right\};$$

d'où l'on a conclu,

$$\frac{d.\delta v^{\text{iv}}}{dt} = -73'',9016.e^{\text{iv}\,2} - 85'',7873.e^{\text{v}\,2} + 132'',4989.e^{\text{iv}}.e^{\text{v}}.\cos.(\varpi^{\text{v}} - \varpi^{\text{iv}}).$$

On peut, dans le second membre de cette équation, négliger la partie constante qui se confond avec le moyen mouvement de Jupiter, et alors on a,

$$\frac{d.\delta v^{\text{iv}}}{dt} = -73'',9016.t.2e^{\text{iv}}.\frac{de^{\text{iv}}}{dt} - 85'',7873.t.2e^{\text{v}}.\frac{de^{\text{v}}}{dt}$$
$$+ 132'',4989.t.\left\{\left(e^{\text{iv}}.\frac{de^{\text{v}}}{dt} + e^{\text{v}}.\frac{de^{\text{iv}}}{dt}\right).\cos.(\varpi^{\text{v}} - \varpi^{\text{iv}}) - e^{\text{iv}}e^{\text{v}}.\frac{(d\varpi^{\text{v}} - d\varpi^{\text{iv}})}{dt}.\sin.(\varpi^{\text{v}} - \varpi^{\text{iv}})\right\}.$$

En substituant pour $\frac{de^{\text{iv}}}{dt}$, $\frac{de^{\text{v}}}{dt}$, $\frac{d\varpi^{\text{iv}}}{dt}$, $\frac{d\varpi^{\text{v}}}{dt}$, leurs valeurs données par ce qui précède, et intégrant, on a

$$\delta v^{\text{iv}} = -\,t^2.0'',0000020066.$$

Cette inégalité est insensible dans l'intervalle de mille ou douze

cents ans, et même par rapport aux observations les plus anciennes qui nous soient parvenues ; on peut donc la négliger.

Il nous reste à considérer le rayon vecteur de Jupiter. On a vu dans le n°. 8, que les termes dépendans du cube des excentricités, ajoutent à son expression la quantité

$$\begin{aligned} &- a^{\text{iv}}\, e^{\text{iv}} . H . \cos.\,(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\varepsilon^{\text{v}} - 2\varepsilon^{\text{iv}} - \varpi^{\text{iv}} + A) \\ &+ a^{\text{v}}\, e^{\text{v}} . H . \cos.\,(4n^{\text{iv}}t - 5n^{\text{v}}t + 4\varepsilon^{\text{iv}} - 5\varepsilon^{\text{v}} - \varpi^{\text{iv}} - A) \\ &+ \frac{4m^{\text{v}}.n^{\text{iv}}.a^{\text{iv}2}}{5n^{\text{v}} - 2n^{\text{iv}}} . \left\{ \begin{array}{l} P . \sin.\,(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\varepsilon^{\text{v}} - 2\varepsilon^{\text{iv}}) \\ + P' . \cos.\,(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\varepsilon^{\text{v}} - 2\varepsilon^{\text{iv}}) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

En réduisant cette fonction en nombres, on trouve

$$\delta r^{\text{iv}} = (1 + \mu^{\text{v}}) . \left\{ \begin{array}{l} -0{,}0003042733 . \cos.\,(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\varepsilon^{\text{v}} - 2\varepsilon^{\text{iv}} - 13^{\circ}{,}4966) \\ +0{,}0001001860 . \cos.\,(4n^{\text{iv}}t - 5n^{\text{v}}t + 4\varepsilon^{\text{iv}} - 5\varepsilon^{\text{v}} + 50^{\circ}{,}3108) \end{array} \right\}.$$

La dernière de ces inégalités réunie à celles-ci,

$$(1 + \mu^{\text{v}}) . \left\{ \begin{array}{l} 0{,}0000268383 . \cos.\,(5n^{\text{v}}t - 4n^{\text{iv}}t + 5\varepsilon^{\text{v}} - 4\varepsilon^{\text{iv}} - \varpi^{\text{iv}}) \\ -0{,}0000516048 . \cos.\,(5n^{\text{v}}t - 4n^{\text{iv}}t + 5\varepsilon^{\text{v}} - 4\varepsilon^{\text{iv}} - \varpi^{\text{v}}) \end{array} \right\},$$

donne la suivante,

$$\delta r^{\text{v}} = (1 + \mu^{\text{v}}) . 0{,}0000983161 . \cos.\,(4n^{\text{iv}}t - 5n^{\text{v}}t + 4\varepsilon^{\text{iv}} - 5\varepsilon^{\text{v}} - 15^{\circ}{,}9874).$$

Le demi-grand axe a^{iv} dont on doit faire usage pour calculer la partie elliptique du rayon vecteur, doit, par le n°. 20, être augmenté de la quantité $\frac{1}{3} a^{\text{iv}} . m^{\text{iv}}$; en la réunissant à la valeur de a^{iv} du n°. 21, on trouve

$$a^{\text{iv}} = 5{,}20279108.$$

Inégalités du mouvement de Jupiter en latitude.

34. Il résulte du n°. 14, que les termes dépendans du carré de la force perturbatrice, ajoutent à la valeur de $\frac{d\varphi^{\text{iv}}}{dt}$, la quantité

$$\frac{-m^{\text{v}} . \sqrt{a^{\text{v}}}}{m^{\text{iv}} . \sqrt{a^{\text{iv}}} + m^{\text{v}} . \sqrt{a^{\text{v}}}} . \left\{ \frac{\delta\gamma}{t} . \cos.\,(\Pi - \theta^{\text{iv}}) - \gamma . \frac{\delta\Pi}{t} . \sin.\,(\Pi - \theta^{\text{iv}}) \right\};$$

et à la valeur de $\frac{d\theta^{\text{iv}}}{dt}$, la quantité

$$\frac{-m^{\text{v}} . \sqrt{a^{\text{v}}}}{(m^{\text{iv}} . \sqrt{a^{\text{iv}}} + m^{\text{v}} . \sqrt{a^{\text{v}}}) . \varphi} . \left\{ \frac{\delta\gamma}{t} . \sin.\,(\Pi - \theta^{\text{iv}}) + \gamma . \frac{\delta\Pi}{t} . \cos.\,(\Pi - \theta^{\text{iv}}) \right\}.$$

$\delta\gamma$ et $\delta\Pi$ étant déterminés par le n°. cité. La première de ces fonctions, réduite en nombres, est égale à

$$-0'',000224'';$$

elle doit être ajoutée aux valeurs de $\frac{d\phi^{\text{iv}}}{dt}$ et $\frac{d\phi_{,}^{\text{iv}}}{dt}$ du n°. 15. La seconde fonction réduite en nombres, est égale à

$$0'',002504;$$

elle doit être ajoutée aux valeurs de $\frac{d\theta^{\text{iv}}}{dt}$ et $\frac{d\theta_{,}^{\text{iv}}}{dt}$ du n°. 25; on aura ainsi,

$$\frac{d\phi^{\text{iv}}}{dt} = -\ 0'',241398;$$

$$\frac{d\phi_{,}^{\text{iv}}}{dt} = -\ 0'',689044;$$

$$\frac{d\theta^{\text{iv}}}{dt} = 19'',929296;$$

$$\frac{d\theta_{,}^{\text{iv}}}{dt} = -\ 45'',254832.$$

On trouve ensuite, par les formules du n°. 51 du second livre,

$$\delta s^{\text{iv}} = (1+\mu^{\text{v}}).\left\{\begin{array}{l} 1'',742154.\sin.(n^{\text{v}}t+\varepsilon^{\text{v}}-\Pi^{\text{iv}}) \\ +2'',049156.\sin.(2n^{\text{v}}t-n^{\text{iv}}t+2\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon^{\text{iv}}-\Pi^{\text{iv}}) \\ +3'',456117.\sin.(3n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+3\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}}-\Pi^{\text{v}}) \\ -0'',862291.\sin.(4n^{\text{v}}t-3n^{\text{iv}}t+4\varepsilon^{\text{v}}-3\varepsilon^{\text{iv}}-\Pi^{\text{iv}}) \\ -0'',830647.\sin.(2n^{\text{iv}}t-n^{\text{v}}t+2\varepsilon^{\text{iv}}-\varepsilon^{\text{v}}-\Pi^{\text{iv}}) \end{array}\right\};$$

Π^{iv} dans cette formule, étant la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Saturne sur celle de Jupiter. Enfin, on a par le n°. 10, l'inégalité

$$\delta s^{\text{iv}} = 12'',165680.\sin.(3n^{\text{iv}}t-5n^{\text{v}}t+3\varepsilon^{\text{iv}}-5\varepsilon^{\text{v}}+66°,1219).$$

CHAPITRE XIII.

Théorie de Saturne.

35. L'ÉQUATION

$$\delta r^{\text{iv}} = -\frac{r^{\text{iv}2}}{r''}.(1-a^2).\delta V^{\text{iv}}$$

trouvée dans le n°. 33, relativement à Jupiter, devient pour Saturne,

$$\delta r^{\text{v}} = -\frac{r^{\text{v}2}}{r''}.(1-a^2).\delta V^{\text{v}}.$$

Si l'on prend pour r'' et r^{v}, les moyennes distances de la Terre et de Saturne au Soleil, et si l'on suppose $\delta V^{\text{v}} = \pm 1''$, on aura

$$\delta r^{\text{v}} = \mp 0{,}000141326.$$

On peut ainsi négliger les inégalités de δr^{v} au-dessous de $\mp 0{,}000141$. Nous négligerons les inégalités du mouvement de Saturne en longitude et en latitude, au-dessous d'un quart de seconde.

Inégalités de Saturne indépendantes des excentricités.

$$\delta v^{\text{v}} = (1+\mu^{\text{iv}}).\left\{\begin{array}{l}
9'',742382.\sin.(n^{\text{iv}}t - n^{\text{v}}t + \varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon^{\text{v}}) \\
-97'',202867.\sin.2.(n^{\text{iv}}t - n^{\text{v}}t + \varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon^{\text{v}}) \\
-20'',265220.\sin.3.(n^{\text{iv}}t - n^{\text{v}}t + \varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon^{\text{v}}) \\
-\ 6'',067124.\sin.4.(n^{\text{iv}}t - n^{\text{v}}t + \varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon^{\text{v}}) \\
-\ 2'',151379.\sin.5.(n^{\text{iv}}t - n^{\text{v}}t + \varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon^{\text{v}}) \\
-\ 0'',835768.\sin.6.(n^{\text{iv}}t - n^{\text{v}}t + \varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon^{\text{v}}) \\
-\ 0'',358923.\sin.7.(n^{\text{iv}}t - n^{\text{v}}t + \varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon^{\text{v}}) \\
-\ 0'',173227.\sin.8.(n^{\text{iv}}t - n^{\text{v}}t + \varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon^{\text{v}}) \\
-\ 0'',105239.\sin.9.(n^{\text{iv}}t - n^{\text{v}}t + \varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon^{\text{v}})
\end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{\rm vi})\cdot\left\{\begin{array}{l} 28'',544040\cdot\sin.(n^{\rm vi}t-n^{\rm v}t+\varepsilon^{\rm vi}-\varepsilon^{\rm v}) \\ -44'',604670\cdot\sin.2\cdot(n^{\rm vi}t-n^{\rm v}t+\varepsilon^{\rm vi}-\varepsilon^{\rm v}) \\ -4'',404816\cdot\sin.3\cdot(n^{\rm vi}t-n^{\rm v}t+\varepsilon^{\rm vi}-\varepsilon^{\rm v}) \\ -0'',972099\cdot\sin.4\cdot(n^{\rm vi}t-n^{\rm v}t+\varepsilon^{\rm vi}-\varepsilon^{\rm v}) \\ -0'',279908\cdot\sin.5\cdot(n^{\rm vi}t-n^{\rm v}t+\varepsilon^{\rm vi}-\varepsilon^{\rm v}) \\ -0'',146432\cdot\sin.6\cdot(n^{\rm vi}t-n^{\rm v}t+\varepsilon^{\rm vi}-\varepsilon^{\rm v}) \\ -0'',032980\cdot\sin.7\cdot(n^{\rm vi}t-n^{\rm v}t+\varepsilon^{\rm vi}-\varepsilon^{\rm v}) \\ -0'',012166\cdot\sin.8\cdot(n^{\rm vi}t-n^{\rm v}t+\varepsilon^{\rm vi}-\varepsilon^{\rm v}) \end{array}\right\}.$$

$$\delta r = (1+\mu^{\rm iv})\cdot\left\{\begin{array}{l} 0,0039077763 \\ +0,0081538400\cdot\cos.(n^{\rm iv}t-n^{\rm v}t+\varepsilon^{\rm iv}-\varepsilon^{\rm v}) \\ +0,0013838330\cdot\cos.2\cdot(n^{\rm iv}t-n^{\rm v}t+\varepsilon^{\rm iv}-\varepsilon^{\rm v}) \\ +0,0003200673\cdot\cos.3\cdot(n^{\rm iv}t-n^{\rm v}t+\varepsilon^{\rm iv}-\varepsilon^{\rm v}) \\ +0,0000992632\cdot\cos.4\cdot(n^{\rm iv}t-n^{\rm v}t+\varepsilon^{\rm iv}-\varepsilon^{\rm v}) \\ +0,0000355919\cdot\cos.5\cdot(n^{\rm iv}t-n^{\rm v}t+\varepsilon^{\rm iv}-\varepsilon^{\rm v}) \\ +0,0000135999\cdot\cos.6\cdot(n^{\rm iv}t-n^{\rm v}t+\varepsilon^{\rm iv}-\varepsilon^{\rm v}) \\ +0,0000055135\cdot\cos.7\cdot(n^{\rm iv}t-n^{\rm v}t+\varepsilon^{\rm iv}-\varepsilon^{\rm v}) \\ +0,0000021631\cdot\cos.8\cdot(n^{\rm iv}t-n^{\rm v}t+\varepsilon^{\rm iv}-\varepsilon^{\rm v}) \\ +0,0000006436\cdot\cos.9\cdot(n^{\rm iv}t-n^{\rm v}t+\varepsilon^{\rm iv}-\varepsilon^{\rm v}) \end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{\rm vi})\cdot\left\{\begin{array}{l} -0,0000137622 \\ +0,0001491217\cdot\cos.(n^{\rm v}t-n^{\rm vi}t+\varepsilon^{\rm v}-\varepsilon^{\rm vi}) \\ -0,0003949916\cdot\cos.2\cdot(n^{\rm v}t-n^{\rm vi}t+\varepsilon^{\rm v}-\varepsilon^{\rm vi}) \\ -0,0000480303\cdot\cos.3\cdot(n^{\rm v}t-n^{\rm vi}t+\varepsilon^{\rm v}-\varepsilon^{\rm vi}) \\ -0,0000118201\cdot\cos.4\cdot(n^{\rm v}t-n^{\rm vi}t+\varepsilon^{\rm v}-\varepsilon^{\rm vi}) \\ -0,0000036280\cdot\cos.5\cdot(n^{\rm v}t-n^{\rm vi}t+\varepsilon^{\rm v}-\varepsilon^{\rm vi}) \\ -0,0000012501\cdot\cos.6\cdot(n^{\rm v}t-n^{\rm vi}t+\varepsilon^{\rm v}-\varepsilon^{\rm vi}) \end{array}\right\}.$$

Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.

On a eu égard, comme on l'a fait dans le n°. 33, relativement à Jupiter, aux variations séculaires des coëfficiens des inégalités qui surpassent cent secondes, et l'on a trouvé,

$$\delta v^{v}=(1+\mu^{iv}).\left\{\begin{array}{l}
-35'',523202.\sin.(n^{iv}t+\varepsilon^{iv}-\varpi^{v})\\
+\ 3'',882844.\sin.(n^{iv}t+\varepsilon^{iv}-\varpi^{iv})\\
-\ 6'',371723.\sin.(2n^{iv}t-n^{v}t+2\varepsilon^{iv}-\varepsilon^{v}-\varpi^{v})\\
+\ 8'',249634.\sin.(2n^{iv}t-n^{v}t+2\varepsilon^{iv}-\varepsilon^{v}-\varpi^{iv})\\
-\ 0'',902132.\sin.(3n^{iv}t-2n^{v}t+3\varepsilon^{iv}-2\varepsilon^{v}-\varpi^{v})\\
-\ 0'',688862.\sin.(3n^{iv}t-2n^{v}t+3\varepsilon^{iv}-2\varepsilon^{v}-\varpi^{iv})\\
-\ 0'',279731.\sin.(4n^{iv}t-3n^{v}t+4\varepsilon^{iv}-3\varepsilon^{v}-\varpi^{iv})\\
-(561'',940390-t.0'',0312021).\sin.(2n^{v}t-n^{iv}t+2\varepsilon^{v}-\varepsilon^{iv}-\varpi^{v})\\
+(1287'',215250+t.0'',0427691).\sin.(2n^{v}t-n^{iv}t+2\varepsilon^{v}-\varepsilon^{iv}-\varpi^{iv})\\
+(105'',992675-t.0'',0058853).\sin.(3n^{v}t-2n^{iv}t+3\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv}-\varpi^{v})\\
-54'',488162.\sin.(3n^{v}t-2n^{iv}t+3\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv}-\varpi^{iv})\\
+14'',799631.\sin.(4n^{v}t-3n^{iv}t+4\varepsilon^{v}-3\varepsilon^{iv}-\varpi^{v})\\
-\ 7'',516699.\sin.(4n^{v}t-3n^{iv}t+4\varepsilon^{v}-3\varepsilon^{iv}-\varpi^{iv})\\
+\ 4'',301273.\sin.(5n^{v}t-4n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-4\varepsilon^{iv}-\varpi^{v})\\
-\ 2'',171142.\sin.(5n^{v}t-4n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-4\varepsilon^{iv}-\varpi^{iv})\\
+\ 1'',657904.\sin.(6n^{v}t-5n^{iv}t+6\varepsilon^{v}-5\varepsilon^{iv}-\varpi^{v})\\
-\ 0'',791698.\sin.(6n^{v}t-5n^{iv}t+6\varepsilon^{v}-5\varepsilon^{iv}-\varpi^{iv})\\
+\ 0'',667270.\sin.(7n^{v}t-6n^{iv}t+7\varepsilon^{v}-6\varepsilon^{iv}-\varpi^{v})\\
-\ 0'',331301.\sin.(7n^{v}t-6n^{iv}t+7\varepsilon^{v}-6\varepsilon^{iv}-\varpi^{iv})
\end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{vi}).\left\{\begin{array}{l}
\ \ 3'',525920.\sin.(n^{vi}t+\varepsilon^{vi}-\varpi^{v})\\
-\ 3'',122367.\sin.(n^{vi}t+\varepsilon^{vi}-\varpi^{vi})\\
-30'',968721.\sin.(2n^{vi}t-n^{v}t+2\varepsilon^{vi}-\varepsilon^{v}-\varpi^{v})\\
+\ 8'',537570.\sin.(2n^{vi}t-n^{v}t+2\varepsilon^{vi}-\varepsilon^{v}-\varpi^{vi})\\
-52'',272469.\sin.(3n^{vi}t-2n^{v}t+3\varepsilon^{vi}-2\varepsilon^{v}-\varpi^{v})\\
+77'',633790.\sin.(3n^{vi}t-2n^{v}t+3\varepsilon^{vi}-2\varepsilon^{v}-\varpi^{vi})\\
+\ 1'',726346.\sin.(4n^{vi}t-3n^{v}t+4\varepsilon^{vi}-3\varepsilon^{v}-\varpi^{v})\\
-\ 2'',340202.\sin.(4n^{vi}t-3n^{v}t+4\varepsilon^{vi}-3\varepsilon^{v}-\varpi^{vi})\\
-\ 0'',579410.\sin.(5n^{vi}t-4n^{v}t+5\varepsilon^{vi}-4\varepsilon^{v}-\varpi^{vi})\\
-\ 2'',079683.\sin.(2n^{v}t-n^{vi}t+2\varepsilon^{v}-\varepsilon^{vi}-\varpi^{v})\\
+\ 4'',696226.\sin.(3n^{v}t-2n^{vi}t+3\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{vi}-\varpi^{v})\\
+\ 0'',468213.\sin.(4n^{v}t-3n^{vi}t+4\varepsilon^{v}-3\varepsilon^{vi}-\varpi^{v})
\end{array}\right\};$$

$$\delta r^{v}=(1+\mu^{iv}).\left\{\begin{array}{l}
-0,0003422170.\cos.(n^{v}t+\varepsilon^{v}-\varpi^{iv})\\
-0,0020775935.\cos.(2n^{v}t-n^{iv}t+2\varepsilon^{v}-\varepsilon^{iv}-\varpi^{v})\\
+0,0053861750.\cos.(2n^{v}t-n^{iv}t+2\varepsilon^{v}-\varepsilon^{iv}-\varpi^{iv})\\
+0,0011594872.\cos.(3n^{v}t-2n^{iv}t+3\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv}-\varpi^{v})\\
-0,0006217670.\cos.(3n^{v}t-2n^{iv}t+3\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv}-\varpi^{iv})\\
+0,0002117893.\cos.(4n^{v}t-3n^{iv}t+4\varepsilon^{v}-3\varepsilon^{iv}-\varpi^{v})
\end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{vi}).$$

$$+(1+\mu^{\text{vi}}).\left\{\begin{array}{l}-0{,}0003750767.\cos.(3n^{\text{vi}}t-2n^{\text{v}}t+3\varepsilon^{\text{vi}}-2\varepsilon^{\text{v}}-\varpi^{\text{v}})\\+0{,}0005605490.\cos.(3n^{\text{vi}}t-2n^{\text{v}}t+3\varepsilon^{\text{vi}}-2\varepsilon^{\text{v}}-\varpi^{\text{vi}})\end{array}\right\}.$$

Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites.

$$\delta v^{\text{v}}=(1+\mu^{\text{iv}}).\left\{\begin{array}{l}-(169'',283424-t.0'',001117).\sin.\left\{\begin{array}{l}3n^{\text{v}}t-n^{\text{iv}}t+3\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon^{\text{iv}}\\+94^{\circ},0139-t.106'',635\end{array}\right\}\\+88'',045398.\sin.(n^{\text{iv}}t-n^{\text{v}}t+\varepsilon^{\text{iv}}-\varepsilon^{\text{v}}+93^{\circ},6429)\\-(2066'',920900-t.0'',047745).\sin.\left\{\begin{array}{l}2n^{\text{iv}}t-4n^{\text{v}}t+2\varepsilon^{\text{iv}}-4\varepsilon^{\text{v}}\\+62^{\circ},4250+t.152'',77\end{array}\right\}\\-9'',061090.\sin.(5n^{\text{v}}t-3n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-3\varepsilon^{\text{iv}}-63^{\circ},5025)\end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{\text{vi}}).\left\{\begin{array}{l}5'',936888.\sin.(3n^{\text{vi}}t-3n^{\text{v}}t+3\varepsilon^{\text{vi}}-3\varepsilon^{\text{v}}-75^{\circ},4576)\\+95'',757344.\sin.(3n^{\text{vi}}t-n^{\text{v}}t+3\varepsilon^{\text{vi}}-\varepsilon^{\text{v}}-95^{\circ},0779)\end{array}\right\}.$$

En réunissant les inégalités dépendantes de $n^{\text{iv}}t-n^{\text{v}}t$, et de $3n^{\text{v}}t-3n^{\text{vi}}t$, avec celles qui sont indépendantes des excentricités, on a pour leurs sommes,

$$(1+\mu^{\text{iv}}).89'',404702.\sin.(n^{\text{iv}}t-n^{\text{v}}t+\varepsilon^{\text{iv}}-\varepsilon^{\text{v}}+86^{\circ},7262)$$
$$-(1+\mu^{\text{vi}}).5'',914481.\sin.(3n^{\text{vi}}t-3n^{\text{v}}t+3\varepsilon^{\text{vi}}-3\varepsilon^{\text{v}}+76^{\circ},0577).$$

On a ensuite,

$$\delta r^{\text{v}}=(1+\mu^{\text{iv}}).\left\{\begin{array}{l}-0{,}0011710805.\cos.(3n^{\text{v}}t-n^{\text{iv}}t+3\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon^{\text{iv}}-100^{\circ},2330)\\-0{,}0005621901.\cos.(n^{\text{iv}}t-n^{\text{v}}t+\varepsilon^{\text{iv}}-\varepsilon^{\text{v}}+92^{\circ},7139)\\+\{0{,}0151990624-t.0{,}0000003370\}.\cos.\left\{\begin{array}{l}2n^{\text{iv}}t-4n^{\text{v}}t+2\varepsilon^{\text{iv}}-4\varepsilon^{\text{v}}\\+62^{\circ},2324+t.151'',36\end{array}\right\}\end{array}\right\}.$$

L'inégalité du rayon vecteur, dépendante de $n^{\text{iv}}t-n^{\text{v}}t$, réunie à son analogue indépendante des excentricités, donne

$$(1+\mu^{\text{iv}}).0{,}0081090035.\cos.(n^{\text{v}}t-n^{\text{iv}}t+\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon^{\text{iv}}-4^{\circ},3997).$$

$5n^{\text{v}}-2n^{\text{iv}}$ étant très-petit; l'inégalité dépendante de $2n^{\text{iv}}t-4n^{\text{v}}t$, a été calculée par les formules (*B*) et (*C*) du n°. 1. $3n^{\text{vi}}-n^{\text{v}}$ étant fort petit; l'inégalité dépendante de $3n^{\text{v}}t-n^{\text{iv}}t$, a été calculée par les formules (*A*) et (*D*) du même n°. Elle doit, pour plus d'exactitude, être appliquée au moyen mouvement de Saturne, à cause de la longueur de sa période.

Inégalités dépendantes des cubes et des produits de trois et de cinq dimensions, des excentricités et des inclinaisons des orbites, et du carré de la force perturbatrice.

La partie la plus considérable de la grande inégalité de Saturne, est celle qui a pour diviseur $(5n^{v}-2n^{iv})^2$, et qui dépend de P et de P'. Elle a été conclue de la grande inégalité de Jupiter, en multipliant cette dernière partie par le facteur $-\frac{15.m^{iv}.n^{v2}}{6m^{v}.n^{iv2}}$, conformément au n°. 8; ce qui donne pour cette partie de l'inégalité de Saturne,

$$-\{9129'',190020-t.0'',0608061-t^2.0'',00013903\}.\sin.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv})$$
$$-\{863'',415400-t.3'',4217230+t^2.0'',00056750\}.\cos.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv}).$$

La grande inégalité de Saturne se compose de plusieurs autres parties : elle renferme par le n°. 8 la fonction

$$-\frac{2m^{iv}.n^{v}}{5n^{v}-2n^{iv}}.\left\{\begin{array}{l} a^{v2}.\left(\frac{dP}{da^{v}}\right).\cos.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv}) \\ -a^{v2}.\left(\frac{dP'}{da^{v}}\right).\cos.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv}) \end{array}\right\}.$$

En réduisant cette fonction en nombres, on a trouvé pour 1750,

$$160'',922811.\sin.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv})$$
$$-34'',800640.\cos.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv});$$

et pour 1950,

$$158'',002590.\sin.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv})$$
$$-46'',240842.\cos.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv});$$

d'où l'on tire la valeur de cette fonction pour un temps quelconque t, égale à

$$\{160'',922811-t.0'',0146011\}.\sin.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv})$$
$$-\{34'',800640+t.0'',0572010\}.\cos.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv}).$$

La grande inégalité de Saturne renferme encore par le n°. 8, le terme

$$-\frac{e^{v}.H'}{2}.\sin.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv}-\varpi^{v}+A').$$

Ce terme, en 1750, étoit égal à

$$23'',315711.\sin.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv})$$
$$+16'',423734.\cos.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv});$$

et en 1950, il sera égal à

$$23'',800290.\sin.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv})$$
$$+14'',894510.\cos.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv});$$

ce qui donne pour le temps t, l'inégalité

$$\{23'',315711+t.0'',002423\}.\sin.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv})$$
$$+\{16'',423734-t.0'',007646\}.\cos.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv}).$$

La partie de la grande inégalité de Saturne, dépendante des produits de cinq dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites, est, par les n°s 8 et 18,

$$\frac{15.m^{iv}.n^{v^2}}{(5n^{v}-2n^{iv})^2}\left\{\begin{array}{l}\left\{a^{v}.P'_{,}+\frac{2a^{v}.dP_{,}}{(5n^{v}-2n^{iv}).dt}+t.a^{v}.\frac{dP'_{,}}{dt}\right\}.\sin.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv})\\ -\left\{a^{v}.P_{,}-\frac{2a^{v}.dP'_{,}}{(5n^{v}-2n^{iv}).dt}+t.a^{v}.\frac{dP_{,}}{dt}\right\}.\cos.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv})\end{array}\right\};$$

en désignant par $P_{,}$ et $P'_{,}$ les coëfficiens de $\sin.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv})$ et de $\cos.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv})$, du développement de R, et dépendans des produits de cinq dimensions des excentricités et des inclinaisons. On a trouvé pour 1750,

$$a^{v}.P_{,}=-0,0000068376;$$
$$a^{v}.P'_{,}=-0,0000100087;$$

et pour 1950,

$$a^{v}.P_{,}=-0,0000077132;$$
$$a^{v}.P'_{,}=-0,0000096940;$$

par conséquent,

$$a^{v}.\frac{dP_{,}}{dt}=-0,0000000043780;$$
$$a^{v}.\frac{dP'_{,}}{dt}=0,0000000015735;$$

ce qui donne pour la fonction précédente réduite en nombres,

$$-\{89'',952440-t.0'',012596\}.\sin.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv})$$
$$+\{58'',270353+t.0'',035048\}.\cos.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv}).$$

Enfin, on a déterminé par le n°. 16, la partie sensible de la grande

inégalité de Saturne, dépendante du carré de la force perturbatrice, et l'on a trouvé pour cette partie, en 1750,

$$-11'',779433.\sin.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv})$$
$$+132'',470121.\cos.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv});$$

et en 1950,

$$-5'',051766.\sin.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv})$$
$$+134'',644093.\cos.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv});$$

ce qui donne pour le temps t, cette partie égale à

$$-\{11'',779433-t.0'',0336383\}.\sin.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv})$$
$$+\{132'',470121+t.0'',0108698\}.\cos.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv}).$$

Maintenant, si l'on rassemble ces diverses parties de la grande inégalité de Saturne, on aura pour sa valeur entière que l'on doit appliquer au moyen mouvement de cette planète,

$$-(1+\mu^{iv}).\begin{cases}\{9046'',683471-t.0'',0948628-t^2.0'',00013903\}.\sin.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv})\\+\{689'',051830-t.3'',4027934+t^2.0'',00056750\}.\cos.(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv})\end{cases}$$

En réduisant ces deux termes en un seul par la méthode du n°. 17, on aura

$$-(1+\mu^{iv}).\{9072'',888420-t.0'',2624193+t^2.0'',00025990\}.\sin.\begin{cases}5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv}+4^{\circ},8\\-t.239'',597+t^2.0'',039\end{cases}$$

Le carré de la force perturbatrice produit encore par le n°. 12, l'inégalité

$$\frac{\overline{H'}^2}{8}.\frac{(2m^{v}.\sqrt{a^{v}}+5m^{iv}.\sqrt{a^{iv}})}{m^{iv}.\sqrt{a^{iv}}}.\sin.$$ (double argument de la grande inégalité);

ce qui donne

$(94'',719002-t.0'',005320).\sin.$ (double argument de la grande inégalité).

Il faut encore appliquer cette inégalité, au moyen mouvement de Saturne.

L'inégalité

$$\frac{1}{4}.\frac{(3m^{iv}\sqrt{a^{iv}}+2m^{v}.\sqrt{a^{v}})}{m^{iv}.\sqrt{a^{iv}}}.\overline{H}'.K'.\sin.(4n^{iv}t-9n^{v}t+4\varepsilon^{iv}-9\varepsilon^{v}-B'-\overline{A}')$$

trouvée dans le n°. 13, devient, en la réduisant en nombres,

$$-25'',507770 . \sin. (4n^{\text{IV}}t - 9n^{\text{V}}t + 4\varepsilon^{\text{IV}} - 9\varepsilon^{\text{V}} - 67°,3508).$$

On a encore par le n°. 8, l'inégalité

$$\tfrac{5}{4} . K' . \sin. (3n^{\text{V}}t - 2n^{\text{IV}}t + 3\varepsilon^{\text{V}} - 2\varepsilon^{\text{IV}} + \varpi^{\text{V}} + B').$$

Cette inégalité, réduite en nombres, étoit en 1750, égale à

$$145'',417101 . \sin. (2n^{\text{IV}}t - 3n^{\text{V}}t + 2\varepsilon^{\text{IV}} - 3\varepsilon^{\text{V}} + 164°,5950).$$

En 1950, elle sera

$$142'',923362 . \sin. (2n^{\text{IV}}t - 3n^{\text{V}}t + 2\varepsilon^{\text{IV}} - 3\varepsilon^{\text{V}} + 166°,3197);$$

sa valeur pour un temps quelconque t, est donc

$$(145'',417101 - t . 0'',0124687) . \sin. \left\{ \begin{matrix} 2n^{\text{IV}}t - 3n^{\text{V}}t + 2\varepsilon^{\text{IV}} - 3\varepsilon^{\text{V}} \\ + 164°,5950 + t . 86'',23 \end{matrix} \right\}.$$

En réunissant cette inégalité, à celles-ci,

$$\{105'',992675 - t . 0'',005914\} . \sin. (3n^{\text{V}}t - 2n^{\text{IV}}t + 3\varepsilon^{\text{V}} - 2\varepsilon^{\text{IV}} - \varpi^{\text{V}})$$
$$-54'',488162 . \sin. (3n^{\text{V}}t - 2n^{\text{IV}}t + 3\varepsilon^{\text{V}} - 2\varepsilon^{\text{IV}} - \varpi^{\text{IV}}),$$

que nous avons trouvées précédemment; on aura pour leur somme, l'inégalité

$$-(75'',837202 - t . 0'',013555) . \sin. \left\{ \begin{matrix} 2n^{\text{IV}}t - 3n^{\text{V}}t + 2\varepsilon^{\text{V}} - 3\varepsilon^{\text{V}} \\ + 16°,4503 - t . 76'',46 \end{matrix} \right\}.$$

On a vu dans le n°. 5, que le moyen mouvement de Saturne est assujetti à une équation séculaire correspondante à celle que nous avons trouvée dans le n°. 33, pour Jupiter, égale à

$$-t^2 . 0'',0000020066.$$

L'équation séculaire de Saturne est ainsi, par le n°. 5, égale à

$$\frac{m^{\text{IV}} . \sqrt{a^{\text{IV}}}}{m^{\text{V}} . \sqrt{a^{\text{V}}}} . t^2 . 0'',0000020066;$$

et par conséquent égale à

$$t^2 . 0'',00000466 5.$$

Cette inégalité peut être négligée sans erreur sensible.

Il nous reste à considérer le rayon vecteur de Saturne. On a vu dans le n°. 8, que les termes dépendans du cube des excentricités, ajoutent à l'expression du rayon vecteur de Saturne, la quantité

$$- a^{v}.e^{v}.H'.\cos.(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv} - \varpi^{v} - A')$$
$$+ a^{v}.e^{v}.H'.\cos.(3n^{v}t - 2n^{iv}t + 3\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv} + \varpi^{v} + A')$$
$$- \frac{10.m^{iv}.n^{v}.a^{v2}}{5n^{v} - 2n^{iv}} . \left\{ \begin{array}{l} P.\sin.(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv}) \\ + P'.\cos.(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv}) \end{array} \right\}.$$

Cette fonction réduite en nombres, donne

$$\delta r^{v} = (1 + \mu^{iv}) . \left\{ \begin{array}{l} 0{,}0035199 4565 . \cos.(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv} + 14°{,}4782) \\ -0{,}0008553506 \; . \cos.(2n^{iv}t - 3n^{v}t + 2\varepsilon^{iv} - 3\varepsilon^{v} + 39°{,}7988) \end{array} \right\}.$$

En réunissant la dernière de ces deux inégalités à celles-ci, que nous avons trouvées précédemment, dépendantes des simples excentricités,

$$(1 + \mu^{iv}) . \left\{ \begin{array}{l} 0{,}0011594872 . \cos.(3n^{v}t - 2n^{iv}t + 3\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv} - \varpi^{v}) \\ -0{,}0006217670 . \cos.(3n^{v}t - 2n^{iv}t + 3\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \end{array} \right\}.$$

on a

$$\delta r^{v} = -(1 + \mu^{iv}) . 0{,}0013806201 . \cos.(2n^{iv}t - 3n^{v}t + 2\varepsilon^{iv} - 3\varepsilon^{v} - 25°{,}9130).$$

Le demi-grand axe a^{v} dont on doit faire usage pour calculer la partie elliptique du rayon vecteur, doit par le n°. 20, être augmentée de la quantité $\frac{1}{3} . a^{v} . m^{v}$: en la réunissant à la valeur de a^{v} du n°. 21, on trouve

$$a^{v} = 9{,}53881757.$$

Inégalités du mouvement de Saturne en latitude.

36. Les formules du n°. 51 du second livre, donnent

$$\delta s^{v} = (1 + \mu^{iv}) . \left\{ \begin{array}{l} 5''{,}516537 . \sin.(n^{iv}t + \varepsilon^{iv} - \Pi^{v}) \\ -0''{,}772161 . \sin.(2n^{iv}t - n^{v}t + 2\varepsilon^{iv} - \varepsilon^{v} - \Pi^{v}) \\ -0''{,}259092 . \sin.(3n^{iv}t - 2n^{v}t + 3\varepsilon^{iv} - 2\varepsilon^{v} - \Pi^{v}) \\ +9''{,}702232 . \sin.(2n^{v}t - n^{iv}t + 2\varepsilon^{v} - \varepsilon^{iv} - \Pi^{v}) \\ -1''{,}613780 . \sin.(3n^{v}t - 2n^{iv}t + 3\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv} - \Pi^{v}) \\ -0''{,}256736 . \sin.(4n^{v}t - 3n^{iv}t + 4\varepsilon^{v} - 3\varepsilon^{iv} - \Pi^{v}) \end{array} \right\}$$

$$+ (1 + \mu^{vi}) . \left\{ \begin{array}{l} 0''{,}261948 . \sin.(n^{vi}t + \varepsilon^{vi} - \Pi^{vi}) \\ +0''{,}377170 . \sin.(2n^{vi}t - n^{v}t + 2\varepsilon^{vi} - \varepsilon^{v} - \Pi^{vi}) \\ +2''{,}046267 . \sin.(3n^{vi}t - 2n^{v}t + 3\varepsilon^{vi} - 2\varepsilon^{v} - \Pi^{vi}) \end{array} \right\};$$

Π^{v} étant la longitude du nœud de l'orbite de Jupiter sur celle de

Saturne, et Π^{vi} étant la longitude du nœud de l'orbite d'Uranus sur celle de Saturne. Enfin, on a par le n°. 10, l'inégalité

$$\delta s^{v} = -28'',282713 . \sin . (2n^{iv}t - 4n^{v}t + 2\varepsilon^{iv} - 4\varepsilon^{v} + 66°,1219).$$

Il résulte du n°. 14, que les termes dépendans du carré de la force perturbatrice, ajoutent à la valeur de $\frac{d\phi^{v}}{dt}$, la quantité

$$\frac{m^{iv}.\sqrt{a^{iv}}}{m^{iv}.\sqrt{a^{iv}}+m^{v}.\sqrt{a^{v}}} . \left\{ \frac{\delta\gamma}{t} . \cos . (\Pi - \theta^{v}) - \frac{\gamma . \delta\Pi}{t} . \sin . (\Pi - \theta^{v}) \right\};$$

et à la valeur de $\frac{d\theta^{v}}{dt}$, la quantité

$$\frac{m^{iv}.\sqrt{a^{iv}}}{m^{iv}.\sqrt{a^{iv}}+m^{v}.\sqrt{a^{v}}} \left\{ \frac{\delta\gamma}{t} . \sin . (\Pi - \theta^{v}) + \gamma . \frac{\delta\Pi}{t} . \cos . (\Pi - \theta^{v}) \right\};$$

$\delta\gamma$ et $\delta\Pi$ étant déterminés par le n°. cité. La première de ces fonctions, réduite en nombres, est égale à

$$0'',000474 ;$$

elle doit être ajoutée aux valeurs de $\frac{d\phi^{v}}{dt}$ et de $\frac{d\phi_{,}^{v}}{dt}$ du n°. 25. La seconde fonction réduite en nombres, est égale à

$$- 0'',005780 ;$$

elle doit être ajoutée aux valeurs de $\frac{d\theta^{v}}{dt}$ et de $\frac{d\theta_{,}^{v}}{dt}$ du n°. 25. On aura ainsi,

$$\frac{d\phi^{v}}{dt} = 0'',308315 ;$$

$$\frac{d\phi_{,}^{v}}{dt} = - 0'',478816 ;$$

$$\frac{d\theta^{v}}{dt} = - 27'',799890 ;$$

$$\frac{d\theta_{,}^{v}}{dt} = - 58'',775840.$$

CHAPITRE XIV.

Théorie d'Uranus.

37. L'ÉQUATION

$$\delta r^{v} = -\frac{r^{v2}}{r''}.(1-\alpha^2).\delta V^{v}$$

trouvée dans le n°. 35, relativement à Saturne, devient pour Uranus,

$$\delta r^{vi} = -\frac{r^{vi2}}{r''}.(1-\alpha^2).\delta V^{vi}.$$

Si l'on prend pour r'' et r^{vi}, les moyennes distances de la Terre et d'Uranus au Soleil, et si l'on suppose $\delta V^{vi} = \pm 1''$; on aura

$$\delta r^{vi} = \mp 0{,}00057648\,;$$

on peut ainsi négliger les inégalités de δr^{vi} au-dessous de $\mp 0{,}00057$. Nous négligerons les inégalités du mouvement d'Uranus en longitude et en latitude, au-dessous d'un quart de seconde.

Inégalités d'Uranus, indépendantes des excentricités.

$$\delta v^{vi} = (1+\mu^{iv}).\left\{\begin{array}{l} 161'',438440.\sin.(n^{iv}t-n^{vi}t+\varepsilon^{iv}-\varepsilon^{vi}) \\ -\ 0'',587550.\sin.2.(n^{iv}t-n^{vi}t+\varepsilon^{iv}-\varepsilon^{vi}) \\ -\ 0'',080319.\sin.3.(n^{iv}t-n^{vi}t+\varepsilon^{iv}-\varepsilon^{vi}) \\ -\ 0'',011090.\sin.4.(n^{iv}t-n^{vi}t+\varepsilon^{iv}-\varepsilon^{vi}) \\ -\ 0'',002371.\sin.5.(n^{iv}t-n^{vi}t+\varepsilon^{iv}-\varepsilon^{vi}) \end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{v}).\left\{\begin{array}{l} 65'',961045.\sin.(n^{v}t-n^{vi}t+\varepsilon^{v}-\varepsilon^{vi}) \\ -13'',027691.\sin.2.(n^{v}t-n^{vi}t+\varepsilon^{v}-\varepsilon^{vi}) \\ -\ 2'',660850.\sin.3.(n^{v}t-n^{vi}t+\varepsilon^{v}-\varepsilon^{vi}) \\ -\ 0'',754350.\sin.4.(n^{v}t-n^{vi}t+\varepsilon^{v}-\varepsilon^{vi}) \\ -\ 0'',247564.\sin.5.(n^{v}t-n^{vi}t+\varepsilon^{v}-\varepsilon^{vi}) \\ -\ 0'',089294.\sin.6.(n^{v}t-n^{vi}t+\varepsilon^{v}-\varepsilon^{vi}) \\ -\ 0'',033731.\sin.7.(n^{v}t-n^{vi}t+\varepsilon^{v}-\varepsilon^{vi}) \\ -\ 0'',012801.\sin.8.(n^{v}t-n^{vi}t+\varepsilon^{v}-\varepsilon^{vi}) \end{array}\right\};$$

$$\delta r^{vi} = (1+\mu^{iv}).$$

$$\delta r^{VI} = (1+\mu^{IV}).\left\{\begin{array}{l} 0{,}0063473160 \\ +0{,}0048914790.\cos.(n^{IV}t-n^{VI}t+\varepsilon^{IV}-\varepsilon^{VI}) \\ +0{,}0000236184.\cos.2.(n^{IV}t-n^{VI}t+\varepsilon^{IV}-\varepsilon^{VI}) \\ +0{,}0000030669.\cos.3.(n^{IV}t-n^{VI}t+\varepsilon^{IV}-\varepsilon^{VI}) \\ +0{,}0000005044.\cos.4.(n^{IV}t-n^{VI}t+\varepsilon^{IV}-\varepsilon^{VI}) \end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{V}).\left\{\begin{array}{l} 0{,}0023641285 \\ +0{,}0035433901.\cos.(n^{V}t-n^{VI}t+\varepsilon^{V}-\varepsilon^{VI}) \\ +0{,}0004061682.\cos.2.(n^{V}t-n^{VI}t+\varepsilon^{V}-\varepsilon^{VI}) \\ +0{,}0000889425.\cos.3.(n^{V}t-n^{VI}t+\varepsilon^{V}-\varepsilon^{VI}) \\ +0{,}0000255870.\cos.4.(n^{V}t-n^{VI}t+\varepsilon^{V}-\varepsilon^{VI}) \end{array}\right\}.$$

Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.

$$\delta v^{VI} = (1+\mu^{IV}).\left\{\begin{array}{l} -\ 3'',807443.\sin.(n^{IV}t+\varepsilon^{IV}-\varpi^{VI}) \\ +\ 3'',887493.\sin.(2n^{IV}t-n^{VI}t+2\varepsilon^{IV}-\varepsilon^{VI}-\varpi^{IV}) \\ -11'',224270.\sin.(2n^{VI}t-n^{IV}t+2\varepsilon^{VI}-\varepsilon^{IV}-\varpi^{VI}) \\ -\ 0'',685175.\sin.(2n^{VI}t-n^{IV}t+2\varepsilon^{VI}-\varepsilon^{IV}-\varpi^{IV}) \end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{V}).\left\{\begin{array}{l} -4'',328267.\sin.(n^{V}t+\varepsilon^{V}-\varpi^{VI}) \\ +0'',663139.\sin.(n^{V}t+\varepsilon^{V}-\varpi^{V}) \\ -0'',678358.\sin.(2n^{V}t-n^{VI}t+2\varepsilon^{V}-\varepsilon^{VI}-\varpi^{VI}) \\ +2'',712230.\sin.(2n^{V}t-n^{VI}t+2\varepsilon^{V}-\varepsilon^{VI}-\varpi^{V}) \\ -(135'',961650-t.0'',000761).\sin.(2n^{VI}t-n^{V}t+2\varepsilon^{VI}-\varepsilon^{V}-\varpi^{VI}) \\ +(462'',369642-t.0'',025635).\sin.(2n^{VI}t-n^{V}t+2\varepsilon^{VI}-\varepsilon^{V}-\varpi^{V}) \\ +7'',673429.\sin.(3n^{VI}t-2n^{V}t+3\varepsilon^{VI}-2\varepsilon^{V}-\varpi^{VI}) \\ -5'',069294.\sin.(3n^{VI}t-2n^{V}t+3\varepsilon^{VI}-2\varepsilon^{V}-\varpi^{V}) \\ +1'',304718.\sin.(4n^{VI}t-3n^{V}t+4\varepsilon^{VI}-3\varepsilon^{V}-\varpi^{VI}) \\ -0'',869752.\sin.(4n^{VI}t-3n^{V}t+4\varepsilon^{VI}-3\varepsilon^{V}-\varpi^{V}) \\ +0'',390410.\sin.(5n^{VI}t-4n^{V}t+5\varepsilon^{VI}-4\varepsilon^{V}-\varpi^{VI}) \end{array}\right\};$$

$$\delta r^{VI} = (1+\mu^{V}).\left\{\begin{array}{l} -0{,}0016092001.\cos.(2n^{VI}t-n^{V}t+2\varepsilon^{VI}-\varepsilon^{V}-\varpi^{VI}) \\ +0{,}0061835858.\cos.(2n^{VI}t-n^{V}t+2\varepsilon^{VI}-\varepsilon^{V}-\varpi^{V}) \end{array}\right\}.$$

Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites.

$$\delta v^{vi} = (1+\mu^{v}).\left\{\begin{array}{l} -(408'',978001 - t.0'',0448163).\sin.\left(\begin{array}{l}3n^{vi}t - n^{v}t + 3\varepsilon^{vi} - \varepsilon^{v} \\ -98°,1313 - t.53'',40\end{array}\right) \\ +\ 5'',288440.\sin.(4n^{vi}t - 2n^{v}t + 4\varepsilon^{vi} - 2\varepsilon^{v} - 42°,8685) \\ +25'',864683.\sin.(n^{v}t - n^{vi}t + \varepsilon^{v} - \varepsilon^{vi} + 98°,3271) \end{array}\right\}.$$

La dernière de ces inégalités, réunie à sa correspondante qui est indépendante des excentricités, donne la suivante :

$$(1+\mu^{v}).71'',470002.\sin.(n^{v}t - n^{vi}t + \varepsilon^{v} - \varepsilon^{vi} + 23°,5385).$$

On a ensuite,

$$\delta r^{vi} = -(1+\mu^{v}).0,0007553840.\cos.(3n^{vi}t - n^{v}t + 3\varepsilon^{vi} - \varepsilon^{v} + 83°,3463).$$

Inégalité dépendante des cubes et des produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites.

$$\delta v^{vi} = -(1+\mu^{v}).2'',977432.\sin(5n^{vi}t - 2n^{v}t + 5\varepsilon^{vi} - 2\varepsilon^{v} - 75°,9911).$$

Inégalités du mouvement d'Uranus en latitude.

38. Les formules du n°. 51 du second livre, donnent

$$\begin{array}{l} \delta s^{vi} = (1+\mu^{iv}).1'',970350.\sin.(n^{iv}t + \varepsilon^{iv} - \Pi^{iv}) \\ \quad +(1+\mu^{v}).\left\{\begin{array}{l} 2'',826360.\sin.(n^{v}t + \varepsilon^{v} - \Pi^{v}) \\ +9'',015592.\sin.(2n^{vi}t - n^{v}t + 2\varepsilon^{vi} - \varepsilon^{v} - \Pi^{v}) \end{array}\right\}; \end{array}$$

Π^{iv} étant ici la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Jupiter sur celle d'Uranus, et Π^{v} étant la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Saturne sur celle d'Uranus.

CHAPITRE XV.

De quelques équations de condition qui existent entre les inégalités planétaires, et qui peuvent servir à les vérifier.

39. Les inégalités à longues périodes, produites par les perturbations réciproques de deux planètes m et m', sont à-peu-près, par le n°. 65 du second livre, dans le rapport de $m'\sqrt{a'}$ à $-m\sqrt{a}$; en sorte que pour avoir les perturbations de ce genre, correspondantes dans le mouvement de m', à celles du mouvement de m, il suffit de multiplier celles-ci par $-\frac{m.\sqrt{a}}{m'.\sqrt{a'}}$. Ce résultat est d'autant plus exact, qu'en vertu du rapport qui existe entre les moyens mouvemens des deux planètes, la période de ces inégalités est plus grande par rapport aux durées de leurs révolutions. Nous allons, au moyen de ce théorême, vérifier plusieurs des inégalités précédentes.

L'action de la Terre sur Vénus produit par le n°. 28, dans le mouvement de Vénus, les deux inégalités dont la période est d'environ quatre années,

$$-\ 4'',782561.\sin.(3n''t-2n't+3\epsilon''-2\epsilon'-\varpi')$$
$$+14'',710902.\sin.(3n''t-2n't+3\epsilon''-2\epsilon'-\varpi'').$$

En les multipliant par $-\frac{m'.\sqrt{a'}}{m''.\sqrt{a''}}$, on a pour les inégalités correspondantes de la terre

$$3'',4995.\sin.(3n''t-2n't+3\epsilon''-2\epsilon'-\varpi')$$
$$-10'',7644.\sin.(3n''t-2n't+3\epsilon''-2\epsilon'-\varpi'').$$

Le calcul direct a donné par le n°. 29, pour ces inégalités,

$$3'',661696.\sin.(3n''t-2n't+3\epsilon''-2\epsilon'-\varpi')$$
$$-11'',318247.\sin.(3n''t-2n't+3\epsilon''-2\epsilon'-\varpi'').$$

ce qui diffère peu des inégalités précédentes.

L'action de la Terre sur Vénus produit encore par le n°. 28, l'inégalité suivante dont la période est d'environ huit ans,

$$-4'',645172.\sin.(5n''t-3n't+5\varepsilon''-3\varepsilon'+23°,2302).$$

En la multipliant par $-\frac{m'.\sqrt{a'}}{m''.\sqrt{a''}}$, on a pour l'inégalité correspondante de la Terre,

$$3'',399002.\sin.(5n''t-3n't+5\varepsilon''-3\varepsilon'+23°,2302);$$

et le calcul direct a donné par le n°. 29,

$$3'',473997.\sin.(5n''t-3n't+5\varepsilon''-3\varepsilon'+23°,3759).$$

Mars éprouve, par l'action de Vénus, comme on l'a vu dans le n°. 32, l'inégalité à longue période,

$$-21'',295121.\sin.(3n'''t-n't+3\varepsilon'''-\varepsilon'+72°,7083).$$

En la multipliant par $-\frac{m'''.\sqrt{a'''}}{m'.\sqrt{a'}}$, on a

$$6'',4144.\sin.(3n'''t-n't+3\varepsilon'''-\varepsilon'+72°,7083).$$

Le calcul direct donne par le n°. 28,

$$6'',202706.\sin.(3n'''t-n't+3\varepsilon'''-\varepsilon'+73°,2063);$$

ce qui diffère peu de l'inégalité précédente.

Mars éprouve par le n°. 32, de la part de la Terre, les deux inégalités suivantes, dont la période est d'environ seize ans,

$$-\ 31'',218207.\sin.(2n'''t-n''t+2\varepsilon'''-\varepsilon''-\varpi''')$$
$$+\ 15'',811920.\sin.(2n'''t-n''t+2\varepsilon'''-\varepsilon''-\varpi'').$$

En les multipliant par $-\frac{m'''.\sqrt{a'''}}{m''.\sqrt{a''}}$, on a pour les inégalités correspondantes de la terre,

$$6'',8807.\sin.(2n'''t-n''t+2\varepsilon'''-\varepsilon''-\varpi''')$$
$$-\ 3'',4851.\sin.(2n'''t-n''t+2\varepsilon'''-\varepsilon''-\varpi'').$$

Le calcul direct donne par le n°. 29,

$$6'',597711.\sin.(2n'''t-n''t+2\varepsilon'''-\varepsilon''-\varpi''')$$
$$-\ 3'',381490.\sin.(2n'''t-n''t+2\varepsilon'''-\varepsilon''-\varpi'');$$

ce qui diffère peu des précédentes.

Mars éprouve encore, de la part de la Terre, par le n°. 32, l'inégalité à longue période,

$$-13'',490441.\sin.(4n'''t-2n''t+4\varepsilon'''-2\varepsilon''+75°,3518).$$

En la multipliant par $-\frac{m'''.\sqrt{a'''}}{m''.\sqrt{a''}}$, on a pour l'inégalité correspondante de la Terre,

$$2'',9734.\sin.(4n'''t-2n''t+4\varepsilon'''-2\varepsilon''+75^\circ,3518);$$

ce qui diffère peu de l'inégalité

$$3'',067702.\sin.(4n'''t-2n''t+4\varepsilon'''-2\varepsilon''+75^\circ,3506)$$

trouvée dans le n°. 29.

Les deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, sont encore à-peu-près l'une à l'autre, dans le rapport de $-m^{\text{v}}.\sqrt{a^{\text{v}}}$, à $m^{\text{iv}}.\sqrt{a^{\text{iv}}}$, comme il est facile de s'en convaincre.

Enfin Uranus éprouve de la part de Saturne, par le n°. 37, l'inégalité à longue période,

$$-408'',978001.\sin.(3n^{\text{vi}}t-n^{\text{v}}t+3\varepsilon^{\text{vi}}-\varepsilon^{\text{v}}-98^\circ,1313).$$

En la multipliant par $-\frac{m^{\text{vi}}.\sqrt{a^{\text{vi}}}}{m^{\text{v}}.\sqrt{a^{\text{v}}}}$, on a dans le mouvement de Saturne, l'inégalité

$$99'',900.\sin.(3n^{\text{vi}}t-n^{\text{v}}t+3\varepsilon^{\text{vi}}-\varepsilon^{\text{v}}-98^\circ 1313);$$

ce qui diffère peu de l'inégalité

$$95'',334222.\sin.(3n^{\text{vi}}t-n^{\text{v}}t+\varepsilon^{\text{vi}}-\varepsilon^{\text{v}}-97^\circ,1319)$$

donnée dans le n°. 35.

40. Considérons dans le développement de R, le terme de la forme

$$m'.M^{(1)}ee'.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon-\varpi-\varpi'\};$$

et supposons que $i.(n'-n)+2n$ soit fort petit par rapport à n et à n'; ce terme produira par le n°. 69 du second livre, dans l'excentricité e de l'orbite de la planète m, considérée comme une ellipse variable, l'inégalité

$$-\frac{m'.an}{i.(n'-n)+2n}.M^{(1)}.e'.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon-\varpi-\varpi'\};$$

et dans la position ϖ du périhélie, l'inégalité

$$-\frac{m'.an}{i.(n'-n)+2n}.M^{(1)}.\frac{e'}{e}.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon-\varpi-\varpi'\}.$$

Nommons δe la première de ces inégalités, et $\delta\varpi$, la seconde.

L'expression de v contient le terme $2e.\sin.(nt+\varepsilon-\varpi)$, et par conséquent l'inégalité

$$2.\delta e.\sin.(nt+\varepsilon-\varpi)-2e.\delta\varpi.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi);$$

ce qui donne dans v l'inégalité

$$\frac{2m'.an}{i.(n'-n)+2n}.M^{(1)}.e'.\sin.\{(i-1).(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+n't+\varepsilon'-\varpi'\}.$$

Il résulte du n°. 65 du second livre, que dans le cas de $i.(n'-n)+2n$ très-petit, l'expression de R' relative à l'action de m sur m' renferme encore à très-peu près le terme

$$m\,M^{(1)}.ee'.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon-\varpi-\varpi'\};$$

puisqu'en n'ayant égard qu'aux deux termes de ce genre dans R et R', on a par le n°. cité, à très-peu-près,

$$m.\int \mathrm{d}R+m'.\int \mathrm{d}'R'=0;$$

on a donc dans v' l'inégalité

$$\frac{2m.a'n'}{i.(n'-n)+2n}.M^{(1)}.e.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi\}.$$

Ces deux inégalités de v et de v' sont dans le rapport de $m'.e'.\sqrt{a'}$, à $m.e.\sqrt{a}$; en sorte que la seconde se conclut de la première, en multipliant le coëfficient de celle-ci par $\frac{m.\sqrt{a}}{m'.\sqrt{a'}}.\frac{e}{e'}$.

$5n''-3n'$ étant peu considérable par rapport à n' et même à n'', on a dans v', en supposant $i=5$, une inégalité dépendante de l'argument $5n''t-4n't+5\varepsilon''-4\varepsilon'-\varpi''$, et dans v'', une inégalité dépendante de l'argument $4n''t-3n't+4\varepsilon''-3\varepsilon'-\varpi'$. La première de ces inégalités est, par le n°. 28,

$$6'',779405.\sin.(5n''t-4n't+5\varepsilon''-4\varepsilon'-\varpi'').$$

En multipliant son coëfficient par $\frac{m'.\sqrt{a'}}{m''.\sqrt{a''}}.\frac{e'}{e''}$, on a pour la terre, l'inégalité

$$2'',0310.\sin.(4n''t-3n't+4\varepsilon''-3\varepsilon'-\varpi');$$

le calcul direct donne par le n°. 29, l'inégalité

$$2'',229704.\sin.(4n''t-3n't+4\varepsilon''-3\varepsilon'-\varpi');$$

ce qui diffère peu de la précédente.

Pareillement, $4n'''-2n''$ est assez petit relativement à n'', et même à n'''. En supposant $i=4$, on a dans v'' une inégalité dépendante de l'argument $4n'''t-3n''t+4\varepsilon'''-3\varepsilon''-\varpi'''$, et dans v''', une inégalité dépendante de l'argument $3n'''t-2n''t+3\varepsilon'''-2\varepsilon''-\varpi''$. La première de ces inégalités est, par le n°. 29,

$$2'',491082 . \sin. (4n'''t-3n''t+4\varepsilon'''-3\varepsilon''-\varpi''').$$

En multipliant son coëfficient par $\frac{m''.\sqrt{a''}}{m'''.\sqrt{a'''}}.\frac{e''}{e'''}$, on a pour Mars, l'inégalité

$$2'',0415 . \sin. (3n'''t-2n''t+3\varepsilon'''-2\varepsilon''-\varpi'').$$

Le calcul direct donne par le n°. 32,

$$2'',611123 . \sin. (3n'''t-2n''t+3\varepsilon'''-2\varepsilon''-\varpi'');$$

la différence est dans les limites de celle que l'on peut supposer, d'après le rapport de $4n'''-2n''$, à n''', qui est à-peu-près celui de 1 à 4.

41. Il résulte encore du n°. 71 du second livre, que si $i.(n'-n)+2n$ est très-petit par rapport à n'; l'inégalité de m en latitude, dépendante de $(i-1).(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+n't+\varepsilon'$, est à l'inégalité de m', en latitude, dépendante de $(i-1).(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon$, dans le rapport de $m'.\sqrt{a'}$ à $-m.\sqrt{a}$.

En supposant $i=5$, on a, par le n°. 28, dans le mouvement de Vénus en latitude, l'inégalité

$$-0'',964615 . \sin. (5n''t-4n't+5\varepsilon''-4\varepsilon'-\theta').$$

En multipliant son coëfficient par $-\frac{m'.\sqrt{a'}}{m''.\sqrt{a''}}$, on a dans le mouvement de la terre en latitude, l'inégalité

$$0'',705835 . \sin. (4n''t-3n't+4\varepsilon''-3\varepsilon'-\theta').$$

Le calcul direct donne par le n°. 29, l'inégalité

$$0'',723012 . \sin. (4n''t-3n't+4\varepsilon''-3\varepsilon'-\theta');$$

ce qui diffère peu de la précédente.

$3n^{\text{vi}}-n^{\text{v}}$ est peu considérable par rapport à n^{vi}; en faisant donc $i=3$, on a dans δs^{v} une inégalité dépendante de $3n^{\text{vi}}t-2n^{\text{v}}t+3\varepsilon^{\text{vi}}-2\varepsilon^{\text{v}}$,

et dans δs^{vi}, une inégalité dépendante de $2n^{\text{vi}}t - n^{\text{v}}t + 2\varepsilon^{\text{vi}} - \varepsilon^{\text{v}}$. La première de ces inégalités est, par le n°. 36,

$$2'',046267 . \sin. (3n^{\text{vi}}t - 2n^{\text{v}}t + 3\varepsilon^{\text{vi}} - 2\varepsilon^{\text{v}} - \Pi^{\text{vi}}),$$

Π^{vi} étant la longitude du nœud ascendant de l'orbite d'Uranus sur celle de Saturne. En multipliant le coëfficient de cette inégalité par $-\frac{m^{\text{v}}.\sqrt{a^{\text{v}}}}{m^{\text{vi}}.\sqrt{a^{\text{vi}}}}$, on a dans δs^{vi} l'inégalité

$$-8'',3772 . \sin. (2n^{\text{vi}}t - n^{\text{v}}t + 2\varepsilon^{\text{vi}} - \varepsilon^{\text{v}} - \Pi^{\text{vi}});$$

et par le n°. 38, cette inégalité est

$$-9'',015592 . \sin. (2n^{\text{vi}}t - n^{\text{v}}t + 2\varepsilon^{\text{vi}} - \varepsilon^{\text{v}} - \Pi^{\text{vi}});$$

ce qui diffère peu de la précédente.

42. Il suit du n°. 69 du second livre, que $i'n' - in$ étant supposé très-petit relativement à n et à n', si l'on représente par

$$m'.P.\sin.(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon) + m'.P'.\cos.(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon)$$

la partie du développement de R qui dépend de l'angle $i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon$; il en résulte dans δv l'inégalité

$$-\frac{2m'.an}{i'n' - in} . \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{dP}{de}\right).\cos.(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - nt - \varepsilon + \varpi) \\ -&\left(\frac{dP'}{de}\right).\sin.(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - nt - \varepsilon + \varpi) \end{aligned} \right\};$$

et dans $\delta v'$, l'inégalité

$$-\frac{2m.a'n'}{i'n' - in} . \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{dP}{de'}\right).\cos.(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - n't - \varepsilon' + \varpi') \\ -&\left(\frac{dP'}{de'}\right).\sin.(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - n't - \varepsilon' + \varpi') \end{aligned} \right\}.$$

Il suit encore du n°. 71 du second livre, que les mêmes termes de R donnent dans δs l'inégalité

$$\frac{m'.an}{i'n' - in} . \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{dP}{d\gamma}\right).\cos.(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - nt - \varepsilon + \Pi) \\ -&\left(\frac{dP}{d\gamma}\right).\sin.(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - nt - \varepsilon + \Pi) \end{aligned} \right\}$$

γ étant la tangente de l'inclinaison respective des orbites de m et de m', et Π étant la longitude du nœud ascendant de l'orbite de m' sur celle de m.

Si

Si l'on augmente l'argument de l'inégalité de δv, de $nt+\varepsilon-\varpi$, et que l'on multiplie son coëfficient par e; si l'on augmente l'argument de l'inégalité de $\delta v'$, de $n't+\varepsilon'-\varpi'$, et que l'on multiplie son coëfficient par $\frac{m.\sqrt{a}}{m'.\sqrt{a'}}.e'$; enfin si l'on augmente l'argument de l'inégalité de δs, de $nt+\varepsilon-\Pi$, et si l'on multiplie son coëfficient par -2γ; la somme de ces trois inégalités sera

$$-\frac{2m'.an}{i'n'-in}.\left\{\begin{array}{l}\left\{e.\left(\frac{dP}{de}\right)+e'.\left(\frac{dP}{de'}\right)+\gamma.\left(\frac{dP}{d\gamma}\right)\right\}.\cos.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)\\ -\left\{e.\left(\frac{dP'}{de}\right)+e'.\left(\frac{dP'}{de'}\right)+\gamma.\left(\frac{dP'}{d\gamma}\right)\right\}.\sin.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)\end{array}\right\};$$

or P et P' sont des fonctions homogènes en e, e' et γ, de la dimension $i'-i$, i' étant supposé plus grand que i; la fonction précédente est ainsi égale à

$$-\frac{2m'.an.(i'-i)}{i'n'-in}.\left\{\begin{array}{l}P.\cos.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)\\ -P'.\sin.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)\end{array}\right\}.$$

Maintenant, on a par le n°. 69 du second livre, dans δv, l'inégalité

$$\frac{3m'.an^2.i}{(i'n'-in)^2}.\left\{\begin{array}{l}P.\cos.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)\\ -P'.\sin.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)\end{array}\right\}.$$

D'où il suit que si l'on représente par

$$K.\sin.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon-nt-\varepsilon+O);$$

l'inégalité de δv, dépendante de l'angle $i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon-nt-\varepsilon$; si l'on représente par

$$K'.\sin.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon-nt-\varepsilon+O')$$

l'inégalité de $\delta v'$, dépendante de l'angle $i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon-n't-\varepsilon'$; enfin, si l'on représente par

$$K''.\sin.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon-nt-\varepsilon+O'')$$

l'inégalité de δs, dépendante de l'angle $i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon-nt-\varepsilon$; on a

$$\begin{array}{l}eK.\sin.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon-\varpi+O)\\ +e'K'.\sin.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon-\varpi'+O')\\ -2\gamma.K''.\sin.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon-\Pi+O'')\\ =-\frac{2.(i'-i)}{3i}.H.\frac{(i'n'-in)}{n}.\sin.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon+Q);\end{array}$$

$H . \sin. (i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon + Q)$ étant l'inégalité de δv dépendante de l'angle $i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon$.

$5n' - 2n$ étant fort petit par rapport à n', on a par le n°. 27, dans δv, l'inégalité

$$5'',217417 . \sin. (5n't - 3nt + 5\varepsilon' - 3\varepsilon + 48°,1210).$$

L'inégalité de δs dépendante de $5n't - 3nt + 5\varepsilon' - 3\varepsilon$, est insensible. On a ensuite par le n°. 28, dans $\delta v'$, l'inégalité

$$-1'',029617 . \sin. (4n't - 2nt + 4\varepsilon' - 2\varepsilon - 43°,8980).$$

Enfin, on a par le n°. 27, dans δv, l'inégalité

$$26'',184460 . \sin. (5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 33°,5852).$$

Ici $i' = 5$, et $i = 2$; on a donc par ce qui précède, l'équation de condition,

$$5'',217417 . e . \sin. (5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi + 48°,1210)$$
$$-1'',029617 . e' . \frac{m' . \sqrt{a'}}{m . \sqrt{a}} . \sin. (5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' - 43°,8980)$$
$$= -26'',184460 . \frac{(5n' - 2n)}{n} . \sin. (5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 33°,5852).$$

Le premier membre de cette équation donne

$$1'',11035 . \sin. (5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 31°,6212).$$

Le second membre donne

$$1'',1135 . \sin. (5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 33°,5852);$$

la différence est insensible.

On pourroit vérifier par les théorêmes précédens, plusieurs des inégalités respectives de Jupiter et de Saturne; mais comme toutes les inégalités de ces deux planètes ont été vérifiées plusieurs fois et avec beaucoup de soin, par divers calculateurs, cette dernière vérification devient inutile.

43. L'inégalité de m, produite par l'action de m' et dépendante de l'argument $n't + \varepsilon' - \varpi'$, est par les n°s. 50 et 55 du second livre, égale à

$$\frac{-4n^2}{n' . (n^2 - n'^2)} . (0,1) . e' . \sin. (n't + \varepsilon' - \varpi').$$

L'inégalité de m', produite par l'action de m, et dépendante de l'argument $nt+\varepsilon-\varpi$, est

$$\frac{4n'^2}{n.(n^2-n'^2)}.(0,1).e.\sin.(nt+\varepsilon-\varpi),$$

Les coëfficiens de ces deux inégalités sont donc dans le rapport de $-(0,1).n^3$ à $(1,0).n'^3$; or on a par le n°. 55 du second livre,

$$(1,0)=(0,1).\frac{m.\sqrt{a}}{m'.\sqrt{a'}};$$

en nommant donc Q, le coëfficient de la première inégalité, le coëfficient de la seconde sera

$$-\frac{m.a^5}{m'.a'^5}.\frac{e}{e'}.Q.$$

Les inégalités de ce genre ont été vérifiées, soit au moyen de cette équation de condition, soit au moyen de l'expression précédente de Q. Ainsi l'action de Jupiter produit par le n°. 29 dans la terre, l'inégalité sensible

$$-7'',839149.\sin.(n^{\text{IV}}t+\varepsilon^{\text{IV}}-\varpi^{\text{IV}}).$$

Cette inégalité, par ce qui précède, est

$$\frac{-4n''^2}{n^{\text{IV}}.(n''^2-n^{\text{IV}2})}.(2,4).e^{\text{IV}}.\sin.(n^{\text{IV}}t+\varepsilon^{\text{IV}}-\varpi^{\text{IV}}).$$

Or on a par le n°. 24, $(2,4)=21'',444015$; en substituant dans cette formule cette valeur, et celles de n'', n^{IV}, et e^{IV}, données dans le n°. 22, et multipliant le résultat, par l'arc égal au rayon, on trouve

$$-7'',8397.\sin.(n^{\text{IV}}t+\varepsilon^{\text{IV}}-\varpi^{\text{IV}}).$$

L'action d'Uranus sur Saturne produit par le n°. 35, dans le mouvement de Saturne, l'inégalité

$$-3'',122367.\sin.(n^{\text{VI}}t+\varepsilon^{\text{VI}}-\varpi^{\text{VI}}).$$

En multipliant son coëfficient, par $-\frac{m^{\text{V}}.a^{\text{V}5}}{m^{\text{VI}}.a^{\text{VI}5}}.\frac{e^{\text{V}}}{e^{\text{VI}}}$, on a dans Uranus, l'inégalité

$$0'',663124.\sin.(n^{\text{V}}t+\varepsilon^{\text{V}}-\varpi^{\text{V}});$$

et le calcul direct a donné dans le n°. 35,

$$0'',663139.\sin.(n^{\text{V}}t+\varepsilon^{\text{V}}-\varpi^{\text{V}}).$$

CHAPITRE XVI.

Sur les masses des Planètes et de la Lune.

44. Un des objets les plus importans de la théorie des planètes, est la détermination de leurs masses. On a vu dans le n°. 21, l'incertitude qui subsiste encore à cet égard. Le moyen le plus exact de lever cette incertitude, sera le développement de leurs inégalités séculaires; mais en attendant que la suite des siècles ait fait connoître avec précision ces inégalités, on peut faire usage des inégalités périodiques déterminées par un grand nombre d'observations. Delambre a discuté sous ce point de vue, les nombreuses observations du soleil de Bradley et de Maskeline : il a déterminé par ce moyen, le *maximum* des inégalités produites par les actions de Vénus, de Mars et de la Lune. L'ensemble des observations de Bradley et de Maskeline, lui a donné le *maximum* de l'action de Vénus, plus grand que celui qui correspond à la masse que nous avons supposée précédemment à cette planète, dans le rapport de 1,0743 à l'unité; ce qui donne la masse de Vénus $\frac{1}{356632}$ de celle du Soleil. Les observations de Bradley et de Maskeline, considérées séparément, donnent à très-peu près le même résultat qui par conséquent n'est pas susceptible d'une erreur égale au quinzième de sa valeur.

De-là il suit incontestablement que la diminution séculaire de l'obliquité de l'écliptique est fort approchante de 154″. Pour l'abaisser, comme l'ont fait quelques Astronomes, à 105″, il faudroit diminuer de moitié la masse de Vénus, et cela est évidemment incompatible avec les observations des inégalités périodiques que cette planète produit dans le mouvement de la terre. Les bonnes observations modernes de l'obliquité de l'écliptique sont trop rapprochées, pour déterminer cet élément avec exactitude. Les obser

vations des Arabes paroissent avoir été faites avec beaucoup de soin : ces observateurs qui n'ont rien changé au système de Ptolémée, se sont attachés spécialement à perfectionner leurs instrumens, et leurs observations qui donnent une diminution séculaire de l'obliquité de l'écliptique très-peu différente de 154″. Cette diminution résulte encore des observations de Cocheouking faites à la Chine, au moyen d'un grand gnomon, et qui par leur précision me paroissent mériter beaucoup de confiance.

Delambre a encore déterminé par un grand nombre d'observations, le *maximum* de l'action de Mars sur le mouvement de la Terre. Il a trouvé que cette action est plus petite que celle qui correspond à la masse que j'ai supposée à cette planète, dans le rapport de 0,725 à l'unité; ce qui donne la masse de Mars $\frac{1}{2546320}$ de celle du Soleil. Cette valeur est un peu moins précise que celle de la masse de Vénus, parce que son effet est moindre; mais les données d'après lesquelles nous avons déterminé la masse de Mars étant fort hypothétiques, il importoit de connoître l'erreur qui peut en résulter dans la théorie du soleil; et comme les observations de Bradley et de Maskeline, prises, soit ensemble, soit séparément, concourent à indiquer une diminution dans la masse de Mars, il faut diminuer les inégalités précédentes qu'elle produit dans le mouvement de la terre, dans le rapport de 0,725 à l'unité.

Ces changemens dans les masses de Vénus et de Mars, en produisent de sensibles dans les variations séculaires des élémens de l'orbe terrestre; on trouve alors la longitude du périgée égale à

$$\varpi'' + t.36'',443578 + t^2.0'',0002520005;$$

le coëfficient de l'équation du centre de l'orbe terrestre devient

$$2E - t.0'',530224 - t^2.0'',0000210474.$$

Enfin les valeurs de p'' et de q'' données dans le n°. 30 deviennent

$$t.0'',248589 + t^2.0'',0000713376;$$
$$-\ t.1'',608463 + t^2.0'',0000219740;$$

d'où il suit par le même n°. que la diminution séculaire de l'obliquité de l'écliptique est dans ce siècle, égale à 160″,85. En partant de ces nouvelles données, on trouve par les formules du n°. 31;

$$\psi = t.155'',5927 + 3°,11019 + 42556'',2.\sin.(t.155'',5927 + 95°,0733)$$
$$- 73530'',8.\cos.(t.99'',1227) - 17572'',4.\sin.(t.43'',0446);$$

$$V = 26°,0776 - 3676'',6 - 18187'',6.\cos.(t.155'',5927 + 95°,0733)$$
$$+ 5082'',7.\cos.(t.43'',0446) - 28463'',6.\sin.(t.99'',1227);$$

$$\psi' = t.155'',5927 + 3°,11019 - 3°,11019.\cos.(t.99'',1227)$$
$$- 14282'',3.\sin.(t.43'',0446);$$

$$V' = 26°,0776 - 3676'',6.\{1 - \cos.(t.43'',0446)\}$$
$$- 10330,4.\sin.(t.99'',1227).$$

L'accroissement de l'année tropique, à partir de 1750, est alors égal à

$$- 0^j,000086354.\{1 - \cos.(t.43'',0446)\}$$
$$- 0^j,000442198.\sin.(t.99'',1227);$$

d'où il suit qu'au temps d'Hypparque, l'année tropique étoit de 12'',6769 plus longue qu'en 1750. L'obliquité de l'écliptique étoit plus grande alors de 2948'',2. Enfin, le grand axe de l'orbe solaire a coïncidé avec la ligne des équinoxes, dans l'année 4089 avant notre ère; il lui a été perpendiculaire en 1248.

J'ai déterminé la masse de la lune, par les observations des marées dans le port de Brest. Quoique ces observations laissent beaucoup à desirer encore; cependant elles donnent avec assez de précision, le rapport de l'action de la lune à celle du soleil sur les marées de ce port. Mais j'ai observé dans le n°. 18 du quatrième livre, que les circonstances locales peuvent influer très-sensiblement sur ce rapport, et par conséquent sur la valeur qui en résulte pour la masse de la lune. J'ai indiqué dans le même livre, divers moyens pour reconnoître cette influence; mais ils exigent des observations très-précises des marées, et celles qui ont été faites à Brest, présentent encore assez d'incertitude, pour craindre une erreur au moins d'un huitième, sur la valeur de la masse de la lune. Les observations des marées équinoxiales et solsticiales, semblent même indiquer dans l'action de la lune sur ces marées, une augmentation d'un dixième, due aux circonstances locales; ce qui diminueroit d'un dixième, la valeur que j'ai assignée à la masse de

la lune. Il paroît, en effet, par divers phénomènes astronomiques, que cette valeur est un peu trop grande.

Le premier de ces phénomènes, est l'équation lunaire des tables du soleil. J'ai trouvé dans le n°. 29 du sixième livre 27″,2524 pour le coëfficient de cette équation, en supposant la parallaxe du soleil, égale à 27″,2. Il seroit 26″,4714, si la parallaxe du soleil étoit 26″,4205, telle que je l'ai conclue de la théorie de la lune, comme on le verra dans le livre suivant. Delambre a déterminé ce coëfficient par la comparaison d'un très-grand nombre d'observations, et il l'a trouvé égal à 23″,148; ce qui en admettant la seconde de ces parallaxes du soleil, que plusieurs Astronomes ont conclue du dernier passage de Vénus sur le Soleil, donne la masse de la lune, $\frac{1}{69,2}$ de celle de la terre.

Le second phénomène astronomique est la nutation de l'axe terrestre. J'ai trouvé dans le n°. 13 du livre V, le coëfficient de l'inégalité de cette nutation, égal à 31″,036, en supposant la masse de la lune, divisée par le cube de sa moyenne distance à la terre, triple de la masse du soleil, divisée par le cube de la moyenne distance de la terre au soleil; ce qui suppose la masse de la lune $\frac{1}{58,6}$ de celle de la terre. Maskeline a trouvé par la comparaison de toutes les observations de Bradley, sur la nutation, le coëfficient de cette inégalité égal à 29″,475; ce résultat donne la masse de la lune $\frac{1}{71,0}$ de celle de la terre.

Enfin, le troisième phénomène astronomique, est la parallaxe de la lune. On verra dans le livre suivant, que la constante de l'expression de cette parallaxe, en fonction de la longitude vraie de la lune, est 10580″,3, en supposant la masse de la lune $\frac{1}{58,6}$ de celle de la terre. Burg qui a déterminé cette constante, par un très-grand nombre d'observations de la lune, l'a trouvée égale 10592″,71; et l'on verra par les formules que nous donnerons dans le livre suivant, que ce résultat correspond à une masse de la lune $\frac{1}{74,2}$ de celle de la terre. Il paroît donc, par l'ensemble de ces trois phéno-

mènes, qu'il faut diminuer un peu la masse de la lune, qui résulte des phénomènes des marées observées à Brest, et qu'ainsi l'action de la lune sur les marées de ce port, est sensiblement augmentée par les circonstances locales; car les observations multipliées soit des hauteurs, soit des intervalles des marées, ne permettent pas de supposer cette action sensiblement plus petite que le triple de l'action du soleil.

La valeur la plus vraisemblable de la masse de la lune, qui me paroît résulter des divers phénomènes est $\frac{1}{68,5}$ de celle de la terre. En employant cette valeur, on trouve 23″,370, pour le coëfficient de l'équation lunaire des tables du soleil, et 10589″,13, pour la constante de l'expression de la parallaxe de la lune. On trouve encore 29″,779.cos. (longitude du nœud de la lune), pour l'inégalité de la nutation, et — 55″,648.sin. (tang. du nœud ☾), pour l'inégalité de la précession des équinoxes. Le rapport de l'action de la lune à celle du soleil sur la mer est alors égal à 2,566; ainsi les observations des marées dans le port de Brest, ayant donné 3 pour ce rapport, il paroît qu'il est augmenté par les circonstances locales, dans la raison de 3 à 2,566. Des observations ultérieures et très-précises fixeront invariablement ces divers résultats, sur lesquels il ne reste plus que très-peu d'incertitude.

La masse de Jupiter paroît bien déterminée. Celle de Saturne présente encore quelque incertitude, et il est bien à desirer qu'on la fasse disparoître par l'observation des plus grandes élongations de ses deux derniers satellites, déterminées dans deux points opposés des orbites, afin d'avoir égard à l'ellipticité de ces orbites. On pourra encore employer pour cet objet, la grande inégalité de Jupiter, lorsque les moyens mouvemens de Jupiter et de Saturne seront bien connus; car ils ont une influence très-sensible, sur le diviseur $(5n^{v}-2n^{iv})^2$ qui affecte cette inégalité. Il me paroît vraisemblable qu'il faut augmenter d'une ou deux secondes, le moyen mouvement annuel que j'ai assigné à Jupiter, et diminuer à-peu-près de la même quantité, celui que j'ai assigné à Saturne. Les inégalités périodiques de Jupiter et d'Uranus produites par l'action de

de Saturne, offrent encore un moyen assez exact pour déterminer la masse de cette dernière planète.

La valeur que j'ai assignée à la masse d'Uranus, dépend de la plus grande élongation de ses satellites, observée par Herschel. Ces élongations doivent être vérifiées avec un soin particulier.

Quant à la masse de Mercure; les inégalités qu'elle produit dans le mouvement de Vénus, peuvent servir à la vérifier. Heureusement, son influence sur le système planétaire étant très-petite, l'erreur qui peut exister encore sur la valeur de cette masse, est presque insensible.

CHAPITRE XVII.

Sur la formation des tables astronomiques, et sur le plan invariable du système planétaire.

45. Nous allons présentement indiquer la méthode dont on doit faire usage dans la formation des tables astronomiques. Quoique nous ayons donné les inégalités tant en longitude qu'en latitude, qui ne sont que d'un quart de seconde ; cependant les observations les plus parfaites ne comportant point ce degré de précision, on peut simplifier les calculs, en négligeant les inégalités au-dessous d'une seconde. On formera, au moyen d'un grand nombre d'observations choisies et disposées d'une manière avantageuse, le même nombre d'équations de condition entre les corrections des élémens elliptiques de chaque planète. Ces élémens étant déjà connus a très-peu-près, leurs corrections sont assez petites pour que l'on puisse en négliger les carrés et les puissances supérieures, ce qui rend les équations de condition, linéaires. On ajoutera ensemble toutes les équations dans lesquelles le coëfficient de la même inconnue, est considérable ; de manière que leurs sommes donnent autant d'équations que d'inconnues : en éliminant ensuite, on déterminera chaque inconnue. On pourra même déterminer par ce moyen, les corrections dont les masses supposées aux planètes sont susceptibles. Si les valeurs numériques des inégalités planétaires sont exactement calculées, ce dont on s'assurera en vérifiant avec soin les résultats précédens ; alors on pourra, à chaque observation nouvelle, former une nouvelle équation de condition ; en éliminant ensuite, tous les dix ans, les corrections fournies par ces équations et par toutes les précédentes, on corrigera sans cesse les élémens des tables, et l'on parviendra ainsi à des tables de plus en plus exactes, pourvu, toutefois, que les comètes ne viennent point altérer ces élémens ; mais il y a tout lieu de croire que leur action sur le système planétaire est insensible.

46. Nous avons déterminé dans le n°. 62 du second livre, le plan invariable à l'égard duquel la somme des produits de la masse de chaque planète, par l'aire que son rayon vecteur projeté sur ce plan décrit autour du soleil, est un *maximum*. Si l'on nomme γ l'inclinaison de ce plan, à l'écliptique fixe de 1750; et Π la longitude de son nœud ascendant sur ce plan; on a par le n°. cité,

$$\text{tang.}\,\gamma.\sin.\Pi = \frac{\Sigma.m.\sqrt{a.(1-e^2)}.\sin.\varphi.\sin.\theta}{\Sigma.m.\sqrt{a.(1-e^2)}.\cos.\varphi};$$

$$\text{tang.}\,\gamma.\cos.\Pi = \frac{\Sigma.m.\sqrt{a.(1-e^2)}.\sin.\varphi.\cos.\theta}{\Sigma.m.\sqrt{a.(1-e^2)}.\cos.\varphi},$$

le signe intégral Σ aux différences finies, embrassant tous les termes semblables relatifs à chaque planète. Si l'on fait usage des valeurs de m, a, e, φ, et θ données pour chacune d'elles, dans le n°. 22, on trouve par ces formules,

$$\gamma = 1^\circ{,}7689;$$
$$\Pi = 114^\circ{,}3979.$$

En substituant ensuite pour e φ et θ, leurs valeurs relatives à l'époque de 1950; on a

$$\gamma = 1^\circ{,}7689;$$
$$\Pi = 114^\circ{,}3934;$$

ce qui diffère très-peu des valeurs précédentes, et ce qui fournit une confirmation des variations trouvées précédemment pour les inclinaisons et les nœuds des orbes planétaires.

CHAPITRE XVIII.

De l'action des étoiles sur le systême planétaire.

47. Pour compléter la théorie des perturbations du systême planétaire, il nous reste à considérer celles que ce systême éprouve de la part des comètes et des étoiles. Mais vu l'ignorance où nous sommes des élémens des orbites de la plupart des comètes, et même de l'existence de celles qui ayant une grande distance périhélie, se dérobent à nos regards, et cependant peuvent agir sur les planètes éloignées; il n'est pas possible de déterminer leur action. Heureusement, il y a plusieurs raisons de croire que les masses des comètes sont très-petites, et qu'ainsi leur action est insensible; nous nous bornerons donc ici à considérer l'action des étoiles.

Reprenons pour cet objet, les formules (X), (Y), et (Z) du n°. 46 du second livre,

$$\delta r = \frac{\left\{\begin{array}{l} a.\cos. v.\int ndt.r.\sin. v.\left\{2.\int \mathrm{d}R + r.\left(\frac{dR}{dr}\right)\right\} \\ -a.\sin. v.\int ndt.r.\cos. v.\left\{2.\int \mathrm{d}R + r.\left(\frac{dR}{dr}\right)\right\} \end{array}\right.}{\mu.\sqrt{1-e^2}}; \quad (X)$$

$$\delta v = \frac{\frac{2r.d.\delta r + dr.\delta r}{a^2.ndt} + \frac{3a}{\mu}.\int\int ndt.\mathrm{d}R + \frac{2a}{\mu}.\int ndt.r.\left(\frac{dR}{dr}\right)}{\sqrt{1-e^2}}; \quad (Y)$$

$$\delta s = \frac{a.\cos. v.\int ndt.r.\sin. v.\left(\frac{dR}{dz}\right) - a.\sin. v.\int ndt.r.\cos. v.\left(\frac{dR}{dz}\right)}{\mu.\sqrt{1-e^2}}; (Z)$$

Désignons par m' la masse d'une étoile; par x', y', z', ses trois coordonnées rectangles, rapportées au centre de gravité du soleil; et par r', sa distance à ce centre; x, y, z étant les trois coordonnées de la planète m, et r étant sa distance au soleil. On aura par le n°. 46 du second livre,

$$R = \frac{m'.(xx'+yy'+zz')}{r'^3} - \frac{m'}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}.$$

En développant le second membre de cette équation, suivant les puissances descendantes de r', on aura

$$R = -\frac{m'}{r'} + \frac{m'.r^2}{2r'^3} - \tfrac{3}{2}m'.\frac{(xx'+yy'+zz'-\frac{1}{2}r^2)^2}{r'^5} + \&c.$$

Prenons pour plan fixe, celui de l'orbite primitive de la planète; nous aurons, en négligeant le carré de z,

$$x = r.\cos.v\ ; \quad y = r.\sin.v\ ; \quad z = rs.$$

Nommons ensuite l la latitude de l'étoile m', et U sa longitude; nous aurons

$$x' = r'.\cos.l.\cos.U\ ; \quad y' = r'.\cos.l.\sin.U\ ; \quad z' = r'.\sin.l\ ;$$

d'où l'on tire, en négligeant les puissances descendantes de r', au-dessus de r'^3,

$$R = -\frac{m'}{r'} + \frac{m'.r^2}{4r'^3}.\begin{Bmatrix} 2-3.\cos.^2 l-3.\cos.^2 l.\cos.(2v-2U) \\ -6s.\sin.2l.\cos.(v-U) \end{Bmatrix}.$$

Maintenant, r', l, et U, variant d'une manière presque insensible, si l'on désigne par $R_{,}$ la partie de R, divisée par r'^3; on a en négligeant le carré de l'excentricité de l'orbite de m, et le terme dépendant de s, et qui est de l'ordre des forces perturbatrices que m éprouve par l'action des planètes,

$$\int dR = R_{,} - \frac{m'.a^2}{4r'^3}.(2-3.\cos.^2 l)\ ;$$

$$r.\left(\frac{dR}{dr}\right) = 2R_{,}.$$

La formule (X) deviendra ainsi, en supposant $\mu = 1$, ce qui revient à très-peu-près à prendre pour unité la masse du soleil,

$$\delta r = 4a.\cos.v.\int ndt.rR_{,}.\sin.v - 4a.\sin.v.\int ndt.rR_{,}.\cos.v.$$

Substituons pour r sa valeur $a.\{1+e.\cos.(v-\varpi)\}$, et pour ndt, sa valeur $dv.\{1-2e.\cos.(v-\varpi)\}$; et négligeons sous le signe $\int$, les termes périodiques affectés de l'angle v; nous aurons,

$$ndt.r.R_{,}.\sin.v = \frac{m'.a^3.dv}{4r'^3}.\{(1-\tfrac{3}{2}.\cos.^2 l).e.\sin.\varpi + \tfrac{3}{4}.\cos.^2 l.e.\sin.(\varpi-2U)\};$$

$$ndt.r.R_{,}.\cos.v = \frac{m'.a^3.dv}{4r'^3}.\{(1-\tfrac{3}{2}.\cos.^2 l).e.\cos.\varpi - \tfrac{3}{4}.\cos.^2 l.e.\cos.(\varpi-2U)\};$$

ce qui donne, en regardant ϖ, l, r', et U, comme constans à très-peu-près,

$$\frac{\delta r}{a} = -\frac{m'.a^3.v}{r'^3}.\{(1-\tfrac{3}{2}.\cos.^2 l).e.\sin.(v-\varpi) - \tfrac{3}{4}.\cos.^2 l.e.\sin.(v+\varpi-2U)\}.$$

Maintenant on a

$$\frac{\delta r}{a} = \delta e.\cos.(v-\varpi) + e.\delta\varpi.\sin.(v-\varpi);$$

en comparant cette équation à la précédente, on aura

$$\delta e = \frac{3m'.a^3.v}{4r'^3}.\cos.^2 l.e.\sin.(2\varpi - 2U);$$

$$\delta\varpi = -\frac{m'.a^3.v}{r'^3.e}.\{1-\tfrac{3}{2}.\cos.^2 l - \tfrac{3}{4}.\cos.^2 l.\cos.(2\varpi - 2U)\}.$$

Ainsi l'action de l'étoile m' produit des variations séculaires dans l'excentricité et dans la longitude du périhélie de l'orbite de la planète m; mais ces variations sont incomparablement plus petites que celles qui sont dues à l'action des autres planètes. En effet, si l'on suppose que m soit la terre, r' ne peut pas, d'après les observations, être supposé plus petit que $100000.a$, et alors le terme $\frac{m'.a^3.v}{r'^3}$ n'excède pas

$$m't.0'',000000004$$

t exprimant un nombre d'années juliennes; ce qui est incomparablement au-dessous de la variation séculaire de l'excentricité de l'orbe terrestre, résultante de l'action des planètes, et qui par le n°. 25, est égale à

$$-t.0'',289565;$$

à moins qu'on ne suppose à m' une valeur entièrement invraisemblable. De-là, nous pouvons conclure que l'action des étoiles n'a aucune influence sensible sur les variations séculaires des excentricités et des périhélies des orbes planétaires; et il est facile de voir par le développement de la formule (Z), que leur action n'a pareillement aucune influence sensible sur la position de ces orbes.

Examinons présentement leur influence sur le moyen mouvement des planètes. Pour cela, nous observerons que la formule (Y) donne dans $d.\delta v$, le terme $4\,andt.R_{,}$, et par conséquent, le terme

$$\frac{m'.a^3}{r'^3}.ndt.\{2-3.\cos.^2 l\}.$$

Supposons r' égal à $r'_{,}.(1-\alpha t)$, et l égal à $l_{,}.(1-6t)$; $r'_{,}$ et $l_{,}$ étant

les valeurs de r' et de l en 1750, ou lorsque $t=0$; on aura dans δv la variation

$$\frac{3m'.a^3}{r_{,}'^3}.\left\{1-\tfrac{3}{2}.\cos.^2 l_{,}\right\}.\alpha.nt^2-\frac{3m'.a^3}{2r_{,}'^3}.\sin.2l_{,}.\mathit{6}.nt^2.$$

Les observations ne donnent point la valeur de αt; mais elles peuvent faire connoître celle de $\mathit{6}t$. En supposant pour la terre, $\mathit{6}=1''$, et $r_{,}'=100000.a$; la quantité $\frac{m'.a^3}{r_{,}'^3}.\mathit{6}.nt^2$, devient à très-peu-près,

$$\frac{m'.t^2.6'',2831}{10^{15}};$$

quantité insensible depuis les observations les plus anciennes.

L'expression de $d\delta v$, contient encore par ce qui précède, les termes

$$-\frac{9}{2}.m'.a^3.ndt.\int d.\left\{\frac{s\ \sin.2l}{r'^3}.\cos.(v-U)\right\}-\frac{6m'.a^3}{r'^3}.s.\sin.2l.\cos.(v-U);$$

or on a

$$s=t.\frac{dp}{dt}.\sin.v-t.\frac{dq}{dt}.\cos.v;$$

ce qui donne en négligeant les quantités multipliées par le sinus et le cosinus de l'angle v,

$$\frac{s.\sin.2l}{r'^3}.\cos.(v-U)=\frac{\sin.2l}{2r'^3}.\left\{t.\frac{dp}{dt}.\sin.U-t.\frac{dq}{dt}.\cos.U\right\};$$

et par conséquent

$$d.\frac{s.\sin.2l}{r'^3}.\cos.(v-U)=\frac{\sin.2l}{2r'^3}.\left\{\frac{dp}{dt}.\sin.U-\frac{dq}{dt}.\cos.U\right\};$$

d'où résulte dans $d\delta v$, le terme

$$-\frac{21}{4}.\frac{m'.a^3}{r'^3}.nt\ dt.\sin.2l.\left\{\frac{dp}{dt}.\sin.U-\frac{dq}{dt}.\cos.U\right\};$$

et par conséquent dans δv, l'inégalité séculaire,

$$-\frac{21}{8}.\frac{m'.a^3}{r'^3}.nt^2.\sin.2l.\left\{\frac{dp}{dt}.\sin.U-\frac{dq}{dt}.\cos.U\right\}.$$

Nous avons donné dans le n°. 31, relativement à la terre, les valeurs de $\frac{dp''}{dt}$ et de $\frac{dq''}{dt}$. En les substituant dans la fonction précédente; on voit qu'elle est insensible depuis les observations les plus anciennes.

Il est facile de s'assurer que les résultats précédens ont encore lieu relativement aux planètes les plus distantes du soleil; ainsi

l'action des étoiles sur le système planétaire, est à raison de leur grande distance, totalement insensible.

Il reste présentement à comparer aux observations, les formules des perturbations planétaires, exposées dans ce livre, et principalement celles des deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne; mais cette comparaison exigeroit de trop longs développemens. Il me suffira de remarquer ici, qu'avant la découverte de ces inégalités, les erreurs des meilleures tables s'élevoient à trente-cinq ou quarante minutes, et qu'elles n'excèdent pas maintenant une minute. Halley avoit conclu de la comparaison des observations modernes, soit entre elles, soit aux observations anciennes, que le mouvement de Saturne se rallentit, et que celui de Jupiter s'accélère de siècle en siècle. Lambert avoit reconnu, par les observations modernes, que le mouvement de Saturne s'accélère présentement, et que celui de Jupiter se rallentit. Ces deux phénomènes opposés en apparence, indiquoient dans les mouvemens de ces deux planètes, de grandes inégalités à longues périodes, dont il importoit de connoître les loix et la cause. En soumettant à l'analyse, leurs perturbations réciproques; je parvins aux deux principales inégalités exposées dans les chapitres XII et XIII de ce livre; et je vis que les phénomènes observés par Halley et Lambert, en découlent naturellement, et qu'elles représentent avec une exactitude remarquable, toutes les observations anciennes et modernes. Leur grandeur et la longueur de leurs périodes qui embrassent plus de neuf cents ans, dépendent, comme on l'a vu, du rapport presque commensurable qui existe entre les moyens mouvemens de Jupiter et de Saturne: ce rapport donne naissance à plusieurs autres inégalités considérables que j'ai déterminées, et qui ont donné aux tables, la précision dont elles jouissent maintenant. La même analyse, transportée à toutes les planètes, m'a fait découvrir dans leurs mouvemens, des inégalités très-sensibles que l'observation a confirmées. J'ai lieu de croire que les formules précédentes, calculées avec un soin particulier, ajouteront une précision nouvelle aux tables des mouvemens du système planétaire.

LIVRE

LIVRE VII.

THÉORIE DE LA LUNE.

La théorie de la lune a des difficultés qui lui sont propres, et qui résultent de la grandeur de ses nombreuses inégalités, et du peu de convergence des séries qui les donnent. Si cet astre étoit plus près de la terre; les inégalités de son mouvement seroient moindres, et leurs approximations plus convergentes. Mais à la distance où il se trouve, ces approximations dépendent d'une analyse très-compliquée, et ce n'est qu'avec une attention particulière, et au moyen de considérations délicates, que l'on peut déterminer l'influence des intégrations successives, sur les différens termes de l'expression de la force perturbatrice. Le choix des coordonnées n'est point indifférent au succès des approximations : la force perturbatrice du soleil dépend des sinus et cosinus des élongations de la lune au soleil, et de ses multiples : leur réduction en sinus et cosinus d'angles dépendans des moyens mouvemens du soleil et de la lune, est pénible et peu convergente, à raison des grandes inégalités de la lune; il y a donc de l'avantage à éviter cette réduction, et à déterminer la longitude moyenne de la lune, en fonction de sa longitude vraie, ce qui peut être utile dans plusieurs circonstances. On pourra ensuite, si on le juge convenable, déterminer avec précision, par le retour des séries, la longitude vraie, en fonction de la longitude moyenne. C'est sous ce point de vue, que je vais envisager la théorie de la lune.

Pour ordonner les approximations; je distingue en divers ordres, les inégalités et les termes qui les composent. Je considère comme quantités du premier ordre, le rapport du moyen mouvement du soleil à celui de la lune, les excentricités des orbes de la lune et de la terre, et l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique. Ainsi, dans l'expression de la longitude moyenne en fonction de la longitude vraie, le principal terme de l'équation du centre de la lune, est du

premier ordre : le second ordre comprend le second terme de cette équation, la réduction à l'écliptique, et les trois grandes inégalités connues sous les noms de *variation*, d'*évection* et d'*équation annuelle*. Les inégalités du troisième ordre sont au nombre de quinze : les tables actuelles les renferment toutes, ainsi que les inégalités les plus considérables du quatrième ordre ; et c'est par-là qu'elles représentent les observations, avec une précision qu'il sera difficile de surpasser, et à laquelle la géographie et l'astronomie nautique sont principalement redevables de leurs progrès.

Mon objet, dans ce livre, est de montrer dans la seule loi de la pesanteur universelle, la source de toutes les inégalités du mouvement lunaire, et de me servir ensuite de cette loi, comme moyen de découvertes, pour perfectionner la théorie de ce mouvement, et pour en conclure plusieurs élémens importans du système du monde, tels que les équations séculaires de la lune, sa parallaxe, celle du soleil, et l'applatissement de la terre. Un choix avantageux de coordonnées, des approximations bien conduites, et des calculs faits avec soin, et vérifiés plusieurs fois, doivent donner les mêmes résultats que l'observation ; si la loi de la pesanteur en raison inverse du carré des distances est celle de la nature. Je me suis donc attaché à remplir ces conditions qui exigent des considérations très-délicates, dont l'omission est la cause des discordances que présentent les théories connues de la lune. C'est dans ces diverses considérations que consiste la vraie difficulté du problême. On peut aisément imaginer un grand nombre de moyens différens et nouveaux, de le mettre en équation ; mais la discussion de tous les termes qui, très-petits en eux-mêmes, acquièrent une valeur sensible par les intégrations successives, est ce qu'il offre de plus difficile et de plus important, lorsque l'on se propose de rapprocher la théorie de l'observation ; ce qui doit être le but principal de l'analyse. J'ai déterminé toutes les inégalités du premier, du second et du troisième ordre, et les inégalités les plus considérables du quatrième, en portant la précision jusqu'aux quantités du quatrième ordre inclusivement, et en conservant celles du cinquième ordre, qui se sont présentées d'elles-mêmes. Pour comparer ensuite mon analyse aux observations ; j'ai considéré que les coëfficiens des

tables lunaires de Mason, sont le résultat de la comparaison de la théorie de la pesanteur, avec onze cent trente-sept observations de Bradley, faites dans l'intervalle de 1750 à 1760. Burg, astronome distingué, vient de les rectifier au moyen de plus de trois mille observations de Maskeline, depuis 1765 jusqu'en 1793; les corrections qu'il y a faites sont peu considérables : il y a ajouté neuf équations indiquées par la théorie. Les tables de ces deux astronomes sont disposées dans la même forme que celles de Mayer, dont elles sont des perfectionnemens successifs; car on doit à cet astronome célèbre, la justice d'observer non-seulement qu'il a formé le premier, des tables lunaires assez précises pour servir à la solution du problême des longitudes, mais encore que Mason et Burg ont puisé dans sa théorie, les moyens de perfectionner leurs tables. On y fait dépendre les argumens les uns des autres pour en diminuer le nombre : je les ai réduites avec un soin particulier, à la forme que j'ai adoptée dans ma théorie, c'est-à-dire en sinus et cosinus d'angles croissans proportionnellement à la longitude vraie de la lune. En y comparant les coëfficiens de mes formules; j'ai eu la satisfaction de voir que la plus grande différence qui dans la théorie de Mayer, l'une des plus exactes qui aient paru jusqu'à ce jour, s'élève à près de cent secondes, est ici réduite à trente relativement aux tables de Mason, et au-dessous de vingt-six secondes, relativement aux tables de Burg, qui sont encore plus précises. On diminueroit cette différence, en ayant égard aux quantités du cinquième ordre, qui ont de l'influence, et que l'inspection des termes déjà calculés peut faire connoître : c'est ce que prouve le calcul de deux inégalités dans lesquelles j'ai porté l'approximation jusqu'aux quantités de cet ordre. Ma théorie se rapproche encore plus des tables à l'égard du mouvement en latitude : les approximations de ce mouvement sont plus simples et plus convergentes, que celles du mouvement en longitude; et la plus grande différence entre les coëfficiens de mon analyse et ceux des tables, n'est que de six secondes, en sorte que l'on peut regarder cette partie des tables, comme étant donnée par la théorie elle-même. Quant à la troisième coordonnée de la lune, ou à sa parallaxe; on a préféré avec raison, d'en former les tables, unique-

ment par la théorie qui, vu la petitesse des inégalités de la parallaxe lunaire, doit les donner plus exactement que les observations. Les différences entre mes résultats sur cet objet, et ceux des tables, sont donc celles qui existent entre ma théorie et celle de Mayer, suivie dans ce point par Mason et Burg : elles sont si petites, qu'elles méritent peu d'attention ; mais comme ma théorie se rapproche plus de l'observation, que celle de Mayer, à l'égard du mouvement en longitude ; j'ai lieu de penser qu'elle jouit du même avantage à l'égard des inégalités de la parallaxe.

Les mouvemens du périgée et des nœuds de l'orbe lunaire, offrent encore un moyen de vérifier la loi de la pesanteur. Leur première approximation n'avoit donné d'abord aux Géomètres, que la moitié du premier de ces mouvemens, et Clairaut en avoit conclu qu'il falloit modifier cette loi, en lui ajoutant un second terme. Mais il fit ensuite l'importante remarque, qu'une approximation ultérieure rapprochoit la théorie de l'observation. Le mouvement conclu de mon analyse ne diffère pas du véritable, de sa quatre cent quarantième partie : la différence n'est pas d'un trois cent cinquantième, à l'égard du mouvement des nœuds.

De-là il suit incontestablement que la loi de la gravitation universelle est l'unique cause des inégalités de la lune ; et si l'on considère le grand nombre et l'étendue de ces inégalités, et la proximité de ce satellite à la terre ; on jugera qu'il est de tous les corps célestes, le plus propre à établir cette grande loi de la nature, et la puissance de l'analyse, de ce merveilleux instrument sans lequel il eût été impossible à l'esprit humain de pénétrer dans une théorie aussi compliquée, et qui peut être employé comme un moyen de découvertes, aussi certain que l'observation elle-même.

Parmi les inégalités périodiques du mouvement lunaire en longitude, celle qui dépend de la simple distance angulaire de la lune au soleil, est importante, en ce qu'elle répand un grand jour sur la parallaxe solaire. Je l'ai déterminée en ayant égard aux quantités du cinquième ordre, et même aux perturbations de la terre par la lune, ce qui est indispensable dans cette recherche épineuse. Burg l'a trouvée de $377'',71$ par la comparaison d'un très-grand nombre d'observations. En égalant ce résultat à celui de mon

analyse; on a 26″,4205 pour la parallaxe moyenne du soleil, la même que plusieurs Astronomes ont conclue du dernier passage de Vénus sur cet astre.

Une inégalité non moins importante, est celle qui dépend de la longitude du nœud de la lune. L'observation l'avoit indiquée à Mayer, et Mason l'avoit fixée à 23″,765; mais comme elle ne paroissoit pas résulter de la théorie de la pesanteur, la plupart des Astronomes la négligeoient. Cette théorie approfondie m'a fait voir qu'elle a pour cause, l'applatissement de la terre. Burg l'a trouvée par un grand nombre d'observations de Maskeline, égale à 20″,987; ce qui répond à l'applatissement $\frac{1}{305,05}$.

On peut encore déterminer cet applatissement, au moyen d'une inégalité du mouvement lunaire en latitude, que la théorie m'a fait connoître, et qui dépend du sinus de la longitude vraie de la lune: elle est le résultat d'une nutation dans l'orbe lunaire, produite par l'action du sphéroïde terrestre, et correspondante à celle que la lune produit dans notre équateur, de manière que l'une de ces nutations est la réaction de l'autre; et si toutes les molécules de la terre et de la lune étoient fixement liées entre elles, par des droites inflexibles et sans masse; le système entier seroit en équilibre autour du centre de gravité de la terre, en vertu des forces qui produisent ces deux nutations; la force qui anime la lune, compensant sa petitesse, par la longueur du levier auquel elle seroit attachée. On peut représenter cette inégalité en latitude, en concevant que l'orbe lunaire, au lieu de se mouvoir uniformément sur l'écliptique, avec une inclinaison constante, se meut avec les mêmes conditions, sur un plan très-peu incliné à l'écliptique, et passant constamment par les équinoxes, entre l'écliptique et l'équateur; phénomène que nous retrouverons d'une manière encore plus sensible, dans la théorie des satellites de Jupiter. Ainsi, cette inégalité diminue l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique, lorsque le nœud ascendant de cette orbite coïncide avec l'équinoxe du printemps: elle l'augmente, lorsque ce nœud coïncide avec l'équinoxe d'automne; ce qui ayant eu lieu en 1755, a rendu trop grande, l'inclinaison que Mason a déterminée par les

observations de Bradley de 1750 à 1760. En effet, Burg qui l'a déterminée par des observations faites dans un plus long intervalle, et en ayant égard à l'inégalité précédente, a trouvé une inclinaison plus petite de $11'',42$. Cet Astronome a bien voulu, à ma prière, déterminer le coëfficient de cette inégalité, par un très-grand nombre d'observations, et il l'a trouvé égal à $-24'',6914$; il en résulte $\frac{1}{304,6}$ pour l'applatissement de la terre, le même à très-peu-près que donne l'inégalité précédente du mouvement en longitude. Ainsi la lune, par l'observation de ses mouvemens, rend sensible à l'astronomie perfectionnée, l'ellipticité de la terre dont elle fit connoître la rondeur aux premiers Astronomes, par ses éclipses. Les expériences du pendule semblent indiquer un applatissement un peu moindre, comme on l'a vu dans le troisième livre : cette différence peut dépendre des termes par lesquels la terre s'écarte de la figure elliptique, et qui peu sensibles dans l'expression de la longueur du pendule, deviennent insensibles à la distance de la lune.

Les deux inégalités précédentes méritent toute l'attention des observateurs; car elles ont sur les mesures géodésiques, l'avantage de donner l'applatissement de la terre, d'une manière moins dépendante des irrégularités de sa figure. Si la terre étoit homogène, elles seroient beaucoup plus grandes que suivant les observations qui concourent ainsi avec les phénomènes de la précession des équinoxes, et de la variation de la pesanteur, à exclure l'homogénéité de la terre. Il en résulte encore que la pesanteur de la lune vers la terre, se compose des attractions de toutes les molécules de cette planète; ce qui fournit une nouvelle preuve de l'attraction de toutes les parties de la matière.

La théorie combinée avec les expériences du pendule, les mesures géodésiques, et les phénomènes des marées, donne la constante de l'expression de la parallaxe lunaire, plus petite que suivant les tables de Mason. Elle est très-peu différente de celle que Burg a déterminée par un grand nombre d'observations de la lune, d'éclipses de soleil, et d'occultations d'étoiles par la lune : il suffit de diminuer un peu la masse de ce satellite, déterminée par les

phénomènes des marées, pour faire coïncider cette constante avec le résultat de cet habile Astronome; et cette diminution est indiquée par les observations de l'équation lunaire des tables du soleil, et de la nutation de l'axe terrestre; ce qui semble prouver que dans le port de Brest, le rapport de l'action de la lune à celle du soleil sur la mer, est sensiblement augmenté par les circonstances locales. Des observations ultérieures de tous ces phénomènes lèveront cette légère incertitude.

L'un des plus intéressans résultats de la théorie de la pesanteur, est la connoissance des inégalités séculaires de la lune. Les anciennes éclipses indiquoient dans son mouvement moyen, une accélération dont on a cherché long-temps et inutilement la cause. Enfin la théorie m'a fait connoître qu'elle dépend des variations séculaires de l'excentricité de l'orbe terrestre; que la même cause rallentit les moyens mouvemens du périgée de la lune et de ses nœuds, quand celui de la lune s'accélère; et que les équations séculaires des moyens mouvemens de la lune, de son périgée et de ses nœuds, sont constamment dans le rapport des nombres 1, 3 et 0,74. Les siècles à venir développeront ces grandes inégalités qui sont périodiques comme les variations de l'excentricité de l'orbe terrestre, dont elles dépendent, et qui produiront, un jour, des variations au moins égales au quarantième de la circonférence, dans le mouvement séculaire de la lune, et au douzième de la circonférence, dans celui de son périgée. Déjà les observations les confirment avec une précision remarquable : leur découverte me fit juger qu'il falloit diminuer de quinze à seize minutes, le mouvement séculaire actuel du périgée lunaire, que les Astronomes avoient conclu par la comparaison des observations modernes aux anciennes : toutes les observations faites depuis un siècle, ont mis hors de doute, ce résultat de l'analyse. On voit ici un exemple de la manière dont les phénomènes, en se développant, nous éclairent sur leurs véritables causes. Lorsque la seule accélération du moyen mouvement de la lune étoit connue, on pouvoit l'attribuer à la résistance de l'éther, ou à la transmission successive de la gravité; mais l'analyse nous montre que ces deux causes ne produisent aucune altération sensible dans les moyens mouvemens des nœuds

et du périgée lunaire; ce qui suffiroit pour les exclure, quand même la vraie cause seroit encore ignorée. L'accord de la théorie avec les observations, nous prouve que si les moyens mouvemens de la lune sont altérés par des causes étrangères à l'action de la pesanteur, leur influence est très-petite, et jusqu'à présent insensible.

Cet accord établit d'une manière certaine, la constance de la durée du jour, élément essentiel de toutes les théories astronomiques. Si cette durée surpassoit maintenant d'un centième de seconde, celle du temps d'Hypparque; la durée du siècle actuel seroit plus grande qu'alors, de 365",25 : dans cet intervalle, la lune décrit un arc de 534",6; le moyen mouvement séculaire actuel de la lune en paroîtroit donc augmenté de cette quantité, ce qui ajouteroit 13",51 à son équation séculaire que je trouve par la théorie, de 31",4248 pour le premier siècle compté de 1750. Cette augmentation est incompatible avec les observations qui ne permettent pas de supposer une équation séculaire plus grande de 5", que celle qui résulte de mon analyse; on peut donc affirmer que la durée du jour n'a pas varié d'un centième de seconde, depuis Hypparque; ce qui confirme ce que j'ai trouvé *à priori* dans le n°. 12 du cinquième livre, par la discussion de toutes les causes qui peuvent l'altérer.

Pour ne rien omettre de ce qui peut influer sur le mouvement de la lune; j'ai considéré l'action directe des planètes sur ce satellite, et j'ai reconnu qu'elle est très-peu sensible. Mais le soleil, en lui transmettant leur action sur les élémens de l'orbe terrestre, rend leur influence sur les mouvemens lunaires très-remarquable, et beaucoup plus grande que sur ces élémens eux-mêmes; en sorte que la variation séculaire de l'excentricité de l'orbe terrestre est beaucoup plus sensible dans le mouvement de la lune, que dans celui de la terre. C'est ainsi que l'action de la lune sur la terre, d'où résulte dans le mouvement de cette planète, l'inégalité connue sous le nom d'*équation lunaire*, est, si je puis m'exprimer ainsi, réfléchie à la lune par le moyen du soleil, mais affoiblie à-peu près dans le rapport de cinq à neuf. Cette considération nouvelle ajoute à l'action des planètes sur la lune, des termes plus considérables que ceux qui dépendent de leur action directe. Je développe les

principales

principales inégalités lunaires résultantes des actions directes et indirectes des planètes sur la lune : vu la précision à laquelle on a porté les tables de la lune, il seroit utile d'y introduire ces inégalités.

La parallaxe de la lune, l'excentricité et l'inclinaison de son orbite à l'écliptique vraie, et généralement les coëfficiens de toutes les inégalités lunaires, sont pareillement assujétis à des variations séculaires ; mais elles sont jusqu'à présent très-peu sensibles. C'est la raison par laquelle on retrouve aujourd'hui, la même inclinaison que Ptolémée avoit conclue de ses observations ; quoique l'obliquité de l'écliptique à l'équateur ait diminué sensiblement depuis cet Astronome ; en sorte que la variation séculaire de cette obliquité n'affecte que les déclinaisons de la lune. Cependant, le coëfficient de l'équation annuelle, ayant pour facteur l'excentricité de l'orbe terrestre ; sa variation est assez grande pour y avoir égard dans le calcul des anciennes éclipses.

Les nombreuses comparaisons que Burg et Bouvard ont faites des tables de Mason, avec les observations lunaires de la fin du dix-septième siècle, par la Hire et Flamsteed, du milieu du dix-huitième par Bradley, et avec la suite non interrompue des observations de Maskeline, depuis Bradley jusqu'à ce jour, présentent un résultat auquel on étoit loin de s'attendre. Les observations de la Hire et de Flamsteed, comparées à celles de Bradley, indiquent un mouvement séculaire plus grand de quinze à vingt secondes, que celui des tables lunaires insérées dans la troisième édition de l'Astronomie de Lalande, et qui dans l'intervalle de cent années juliennes, excède un nombre entier de circonférences, de 342°,09629: les observations de Bradley comparées aux dernières observations de Maskeline, donnent au contraire, un mouvement séculaire plus petit de cent cinquante secondes au moins. Enfin les observations faites depuis quinze à vingt ans, prouvent que cette diminution du mouvement de la lune est maintenant croissante. De-là résulte la nécessité de retoucher sans cesse aux époques des tables, imperfection qu'il importe de faire disparoître. Elle indique évidemment l'existence d'une ou de plusieurs inégalités inconnues à longues périodes, que la théorie seule peut

faire connoître. En l'examinant avec soin, je n'ai remarqué aucune inégalité semblable dépendante de l'action des planètes. S'il en existoit une dans la rotation de la terre; elle se manifesteroit dans le moyen mouvement de la lune, et pourroit y produire les anomalies observées; mais l'examen attentif de toutes les causes qui peuvent altérer la rotation de la terre, m'a convaincu de plus en plus, que ses variations sont insensibles. Revenant donc à l'action du soleil sur la lune, j'ai reconnu que cette action produit une inégalité dont l'argument est le double de la longitude du nœud de l'orbite lunaire, plus la longitude de son périgée, moins trois fois la longitude du périgée du soleil. Cette inégalité dont la période est de 184 ans, dépend du produit de ces quatre quantités, le carré de l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique, l'excentricité de cet orbe, le cube de l'excentricité de l'orbe solaire, et le rapport de la parallaxe du soleil à celle de la lune; elle paroît ainsi devoir être insensible; mais les grands diviseurs qu'elle acquiert par les intégrations, peuvent la rendre sensible, sur-tout si les termes les plus considérables dont elle se compose, sont affectés du même signe. Il est très-difficile d'obtenir son coëfficient par la théorie, à cause du grand nombre de ses termes, et de l'extrême difficulté de les apprécier, difficulté beaucoup plus grande encore qu'à l'égard des autres inégalités de la lune; j'ai donc déterminé ce coëfficient au moyen des observations faites depuis un siècle, et j'ai reconnu qu'il est égal à-peu-près à 47",51. Son introduction dans les tables doit en changer les époques et le moyen mouvement. J'ai trouvé ainsi qu'il faut diminuer de 98",654 le moyen mouvement séculaire des tables de la troisième édition de l'Astronomie de Lalande, et j'en ai conclu la formule suivante qui doit être appliquée à la longitude moyenne donnée par ces tables dont l'époque en 1750 est 209°,20820;

$$\{-39'',44 - 98'',654 \cdot i + 47'',51 \cdot \sin . E\};$$

i étant le nombre des siècles écoulés depuis 1750; E étant le double de la longitude du nœud de l'orbite lunaire, plus la longitude de son périgée, moins trois fois la longitude du périgée du soleil. Cette formule représente avec une précision remar-

quable, les corrections des époques de ces tables, déterminées par un très-grand nombre d'observations, pour les six époques de 1691, 1756, 1766, 1779, 1789 et 1801; et comme la théorie examinée avec la plus scrupuleuse attention, ne m'a point indiqué d'autres inégalités lunaires à longues périodes, il me paroît certain que les anomalies observées dans le moyen mouvement de la lune, dépendent de l'inégalité précédente; je ne balance donc point à la proposer aux Astronomes, comme le seul moyen de corriger ces anomalies.

On voit par cet exposé, combien d'élémens intéressans et délicats l'analyse a su tirer des observations de la lune, et combien il importe de multiplier et de perfectionner ces observations qui par leur grand nombre et leur précision, mettront de plus en plus en évidence, ces divers résultats de l'analyse.

L'erreur des tables formées d'après la théorie que je présente dans ce livre, ne s'élèveroit à cent secondes, que dans des cas fort rares; ces tables donneroient donc, avec une exactitude suffisante, la longitude sur la mer. Il est très-facile de les réduire à la forme des tables de Mayer; mais comme dans le problême des longitudes, on se propose de trouver le temps qui correspond à une longitude vraie observée de la lune; il y a quelqu'avantage à réduire en tables, l'expression du temps en fonction de cette longitude. Vu l'extrême complication des approximations successives, et la précision des observations modernes; la plupart des inégalités lunaires ont été jusqu'ici, mieux déterminées par les observations que par l'analyse. Ainsi, en empruntant de la théorie ce qu'elle donne avec exactitude, et la forme de tous les argumens; en rectifiant ensuite par la comparaison d'un très-grand nombre d'observations, ce qu'elle donne par des approximations qui laissent quelque incertitude; on doit parvenir à des tables très-précises. C'est la méthode que Mayer et Mason ont employée avec succès; et en dernier lieu, Burg en la suivant et s'aidant des nouveaux progrès de la théorie lunaire, vient de construire des tables dont les plus grandes erreurs sont au-dessous de quarante secondes. Cependant, il seroit utile pour la perfection des théories astronomiques, que toutes les tables dérivassent du seul principe de la pesanteur universelle, en n'empruntant de l'observation, que les données in-

dispensables. J'ose croire que l'analyse suivante laisse peu de choses à faire pour procurer cet avantage aux tables de la lune, et qu'en portant plus loin encore les approximations, on y parviendra bientôt, du moins à l'égard des inégalités périodiques; car quelque précision que l'on apporte dans les calculs, les mouvemens des nœuds et du périgée seront toujours mieux déterminés par les observations.

CHAPITRE PREMIER.

Intégration des équations différentielles du mouvement lunaire.

1. Reprenons les équations différentielles (K) du n°. 15 du second livre, et donnons-leur la forme suivante,

$$dt = \frac{dv}{hu^2 \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{h^2} \cdot \int \left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{dv}{u^2}}}$$

$$0 = \left(\frac{ddu}{dv^2} + u\right) \cdot \left\{1 + \frac{2}{h^2} \cdot \int \left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{dv}{u^2}\right\} + \frac{du}{h^2 u^2 . dv} \cdot \left(\frac{dQ}{dv}\right) - \frac{1}{h^2} \cdot \left(\frac{dQ}{du}\right) - \frac{s}{h^2 u} \cdot \left(\frac{dQ}{ds}\right) \quad ; (L)$$

$$0 = \left(\frac{dds}{dv^2} + s\right) \cdot \left\{1 + \frac{2}{h^2} \cdot \int \left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{dv}{u^2}\right\} + \frac{1}{h^2 u^2} \cdot \frac{ds}{dv} \cdot \left(\frac{dQ}{dv}\right) - \frac{s}{h^2 u} \cdot \left(\frac{dQ}{du}\right) - \frac{(1+ss)}{h^2 u^2} \cdot \left(\frac{dQ}{ds}\right)$$

Dans ces équations, t exprime le temps, et l'on a

$$Q = \frac{1}{r} - \frac{m'.(xx'+yy'+zz')}{r'^3} + \frac{m'}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}.$$

M, m et m' sont les masses de la terre, de la lune et du soleil; x, y, z sont les coordonnées de la lune rapportées au centre de gravité de la terre, et à une écliptique fixe; x', y', z' sont les coordonnées du soleil; r et r' sont les rayons vecteurs de la lune et du soleil; s est la tangente de la latitude de la lune au-dessus du plan fixe; $\frac{1}{u}$ est la projection de son rayon vecteur sur le même plan; v est l'angle fait par cette projection, et par l'axe des x; enfin h^2 est une constante arbitraire dépendante principalement de la distance de la lune à la terre.

La valeur précédente de Q suppose la terre et la lune sphériques. Pour avoir sa vraie valeur due à la non sphéricité de ces corps; nous observerons que par les propriétés du centre de gravité, il faut transporter au centre de gravité de la lune, 1°. toutes les forces dont chacune de ses molécules est animée par l'action des molécules de la terre, et diviser leur somme par la masse entière de la lune; 2°. les forces dont le centre de gravité de la terre est animé par l'action de la lune, prises en sens contraire. Cela posé, il est facile de voir que dM étant une molécule de la terre, et dm une molécule de la lune, dont la distance à la molécule dM est f; on aura les forces dont le centre de gravité de la lune est animé dans son mouvement relatif autour de la terre, au moyen des différences partielles de la double intégrale

$$\frac{(M+m)}{Mm} \cdot \int\int \frac{dM.dm}{f}$$

prises par rapport aux coordonnées du centre de la lune. Ainsi l'on doit substituer cette fonction à $\frac{M+m}{r}$, dans l'expression précédente de Q. Si la lune étoit sphérique, on pourroit, par le n°. 12 du second livre, supposer sa masse entière réunie à son centre de gravité; on auroit donc alors $\int\int \frac{dM.dm}{f}$ égal à la masse m de la lune, multipliée par la somme de toutes les molécules de la terre, divisées par leurs distances respectives au centre de la lune; en nommant ainsi V cette somme, on auroit

$$\int\int \frac{dM.dm}{f} = m.V.$$

V seroit égal à $\frac{M}{r}$, si la terre étoit sphérique; en désignant donc $V - \frac{M}{r}$ par δV, $m.\delta V$ sera la partie de l'intégrale $\int\int \frac{dM.dm}{f}$, due à la non sphéricité de la terre. Si l'on nomme pareillement V' la somme des molécules de la lune, divisées par leurs distances au centre de gravité de la terre supposée sphérique; on aura

$$\int\int \frac{dM.dm}{f} = M.V';$$

en désignant ainsi par $\delta V'$, la différence $V' - \frac{m}{r}$; $M.\delta V'$ sera la partie de l'intégrale $\int\int \frac{dM.dm}{f}$, due à la non sphéricité de la lune; on aura donc à très peu-près,

$$\frac{(M+m)}{M.m} \cdot \int\int \frac{dM.dm}{f} = \frac{M+m}{r} + (M+m) \cdot \left\{ \frac{\delta V}{M} + \frac{\delta V'}{m} \right\}.$$

Il faut par conséquent augmenter dans l'expression précédente de Q, $\frac{M+m}{r}$, de la quantité

$$(M+m) \cdot \left\{ \frac{\delta V}{M} + \frac{\delta V'}{m} \right\};$$

pour avoir égard à la non sphéricité de la terre et de la lune.

2. Supposons d'abord ces deux corps sphériques, et développons l'expression de Q en série. On a

$$\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}} = \frac{1}{\sqrt{r'^2+r^2-2xx'-2yy'-2zz'}}.$$

Ce second membre développé suivant les puissances descendantes de r', devient

$$\frac{1}{r'} + \frac{(xx'+yy'+zz'-\frac{1}{2}r^2)}{r'^3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{(xx'+yy'+zz'-\frac{1}{2}r^2)^2}{r'^5}$$
$$+ \frac{5}{2} \cdot \frac{(xx'+yy'+zz'-\frac{1}{2}r^2)^3}{r'^7} + \&c.$$

Prenons pour unité de Masse, la somme $M+m$, des masses de la terre et de la lune, et observons que

$$r = \frac{\sqrt{1+ss}}{u};$$

$$x = \frac{\cos. v}{u};$$

$$y = \frac{\sin. v}{u};$$

$$z = \frac{s}{u}.$$

Marquons d'un trait pour le soleil, les quantités u, s et v relatives à la terre; nous aurons

$$Q=\frac{u}{\sqrt{1+ss}}+\frac{m'.u'}{\sqrt{1+s'^2}}.\left\{\begin{array}{l}1+\frac{3}{2}.\frac{\{uu'.\cos.(v-v')+uu'.ss'-\frac{1}{2}.u'^2.(1+ss)\}^2}{(1+s'^2)^2.u^4}\\ +\frac{5}{2}.\frac{\{uu'.\cos.(v-v')+uu'.ss'-\frac{1}{2}.u'^2.(1+ss)\}^3}{(1+s'^2)^3.u^6}+\&c.\\ -\frac{(1+s^2).u'^2}{2.(1+s'^2).u^2}\end{array}\right\}.$$

La distance du soleil à la terre étant à très-peu-près quatre cents fois plus grande que celle de la lune, u' est très-petit relativement à u; ainsi l'on peut, dans la théorie lunaire, négliger les termes de l'ordre u'^5. On peut encore simplifier les calculs, en prenant pour plan de projection, celui de l'écliptique. A la vérité, ce dernier plan n'est pas fixe; mais dans son mouvement séculaire, il emporte l'orbite de la lune, de manière que l'inclinaison moyenne de cette orbite sur lui, reste constante, en sorte que les phénomènes dépendans de cette inclinaison respective, sont toujours les mêmes.

3. Pour le faire voir, nous observerons que s' est, comme il résulte du n°. 59 du second livre, égal à une suite de termes de la forme $k.\sin.(v'+it+\varepsilon)$: nous la représenterons par

$$\Sigma.k.\sin.(v'+it+\varepsilon),$$

i étant un coëfficient extrêmement petit dont nous négligerons le produit par $m'u'^3$. La valeur de s sera, en négligeant les quantités de l'ordre s^3, égale à $\Sigma.k.\sin.(v+it+\varepsilon)+s_{,}$, $s_{,}$ étant la tangente de la latitude de la lune au-dessus de l'écliptique vraie. Cela posé, on aura

$$\frac{ds}{dv}.\left(\frac{dQ}{dv}\right)-us.\left(\frac{dQ}{du}\right)-(1+ss).\left(\frac{dQ}{ds}\right)$$

$$=\frac{3m'.u'^3}{u^2}.\left\{\begin{array}{l}\cos.(v-v')-\frac{u'}{2u}\\ +\frac{5u'}{2u}.\cos.^2(v-v')+\&c.\end{array}\right\}.\left\{\begin{array}{l}s.\cos.(v-v')\\ -\frac{ds}{dv}.\sin.(v-v')-s'\end{array}\right\}.$$

En substituant dans le second membre de cette équation, au lieu de s, $\Sigma.k.\sin.(v+it+\varepsilon)+s_{,}$; et au lieu de s', $\Sigma\ k.\sin.(v'+it+\varepsilon)$; il devient

$$\frac{3m'.u'^3}{u^2}.\left\{\cos.(v-v')-\frac{u'}{2u}+\frac{5u'}{2u}.\cos.^2(v-v')+\&c.\right\}.\left\{s_{,}.\cos.(v-v')-\frac{ds_{,}}{dv}.\sin.(v-v')\right\},$$

La troisième des équations (L) du n°. 1 donne par conséquent,

$$0 = \frac{dds}{dv^2} + s + \frac{\frac{3}{2}.m'.u'^3 s_, + \&c.}{u^4.\left\{h^2 + 2.\int\left(\frac{dQ}{dv}\right).\frac{dv}{u^2}\right\}};$$

ou

$$0 = \frac{dds}{dv^2} + s + \frac{\frac{3}{2}.m'.u'^3 s_,}{h^2.u^4} + \&c.$$

Si l'on néglige les excentricités et les inclinaisons des orbites, on a $u = \frac{1}{a}$, $u' = \frac{1}{a'}$; a' et a étant les moyennes distances du soleil et de la lune à la terre : on verra dans le n°. suivant, que $h^2 = a$ à fort peu-près ; on aura donc

$$0 = \frac{dds}{dv^2} + s + \tfrac{3}{2}.m'.\frac{a^3}{a'^3}.s_, + \&c.$$

Nommons mt le moyen mouvement du soleil, m n'exprimant plus ici la masse de la lune ; on aura par le n°. 16 du second livre, $m^2 = \frac{m'}{a'^3}$. Si l'on suppose ensuite que le temps t soit représenté par le moyen mouvement de la lune, ce que l'on peut toujours faire, on aura $\frac{1}{a^3} = 1$; partant,

$$0 = \frac{dds}{dv^2} + s + \tfrac{3}{2}.m^2.s_, + \&c.$$

Substituons dans cette équation, $\Sigma.k.\sin.(v + it + \varepsilon) + s_,$ au lieu de s, et observons que l'on peut ici changer it dans iv ; on aura

$$0 = \frac{dds_,}{dv^2} + (1 + \tfrac{3}{2}m^2).s_, + \Sigma.k.\{1 - (i+1)^2\}.\sin.(v + iv + \varepsilon) + \&c.;$$

ce qui donne pour la partie de $s_,$ relative au mouvement séculaire de l'écliptique,

$$s_, = \frac{\Sigma.(2i + i^2).k.\sin.(v + iv + \varepsilon)}{\frac{3}{2}.m^2 - 2i - i^2}.$$

Cette dernière quantité est insensible ; car iv s'élevant au plus à cinquante secondes par année, et $\frac{3}{4}m^2 v$ qui exprime à-peu-près comme on le verra dans la suite, le mouvement rétrograde du nœud, surpassant 20° ; $\frac{3}{2}m^2$ est au moins quatre mille fois plus grand que $2i$; on peut donc négliger le terme

$$\Sigma.k.\{1 - (i+1)^2\}.\sin.(v + iv + \varepsilon)$$

dans l'équation différentielle en $s_{,}$, et alors cette équation est indépendante de tout ce qui a rapport au mouvement séculaire de l'écliptique. L'inclinaison moyenne de l'orbite lunaire à l'écliptique vraie, est une des arbitraires de l'intégrale de cette équation; on voit donc qu'à raison de la rapidité du mouvement des nœuds de la lune, cette inclinaison est constante, et la latitude $s_{,}$ de la lune au-dessus de l'écliptique vraie, est la même que dans le cas où cette écliptique seroit immobile; nous pourrons conséquemment supposer dans les recherches suivantes $s' = 0$, ce qui simplifiera les calculs.

Nous aurons de cette manière, en négligeant les quantités des ordres $m'u'^3s^4$, et $m'u'^5$,

$$Q = \frac{u}{\sqrt{1+s^2}} + m'u' + \frac{m'.u'^3}{4u^2}.\{1+3.\cos.(2v-2v')-2s^2\}$$
$$+\frac{m'.u'^4}{8u^3}.\{3.(1-4s^2).\cos.(v-v')+5.\cos.(3v-3v')\};$$

d'où l'on tire en négligeant les quantités de l'ordre $m'u'^4s^3$,

$$\left(\frac{dQ}{du}\right)+\frac{s}{u}.\left(\frac{dQ}{ds}\right) = \frac{1}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{m'.u'^3}{2u^3}.\{1+3.\cos.(2v-2v')\}$$
$$-\frac{3m'.u'^4}{8u^4}.\{(3-4s^2).\cos.(v-v')+5.\cos.(3v-3v')\};$$

$$\left(\frac{dQ}{dv}\right) = -\frac{3m'.u'^3}{2u^2}.\sin.(2v-2v') - \frac{m'.u'^4}{8.u^3}.\{3.(1-4s^2).\sin.(v-v')+15.\sin.(3v-3v')\};$$

$$\left(\frac{dQ}{ds}\right) = -\frac{us}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{m'.u'^3s}{u^2} - \frac{3m'.u'^4s}{u^3}.\cos.(v-v').$$

4. Pour intégrer les équations (L) du n°. 1, nous observerons que sans la force perturbatrice du soleil, la lune décriroit une ellipse dont le centre de la terre occuperoit un des foyers. On auroit alors par le n°. 16 du second livre,

$$s = \gamma.\sin.(v-\theta);$$
$$u = \frac{1}{h^2.(1+\gamma^2)}.\{\sqrt{1+ss}+e.\cos.(v-\varpi)\};$$

équations dans lesquelles γ est la tangente de l'inclinaison de l'orbite lunaire; θ est la longitude de son nœud ascendant; e et ϖ sont deux arbitraires dépendantes principalement de l'excentricité de

l'orbite, et de la position du périhélie. γ et e sont des quantités fort petites : en négligeant la quatrième puissance de γ, on aura

$$u = \frac{1}{h^2.(1+\gamma^2)}.\{1+\tfrac{1}{4}\gamma^2+e.\cos.(v-\varpi)-\tfrac{1}{4}\gamma^2.\cos.(2v-2\theta)\}.$$

Cette valeur de u suppose l'ellipse lunaire immobile ; mais on verra bientôt qu'en vertu de l'action du soleil, les nœuds et le périgée de cette ellipse sont en mouvement. Alors, en désignant par $(1-c).v$ le mouvement direct du périgée, et par $(g-1).v$, le mouvement rétrograde des nœuds, on aura

$$s = \gamma.\sin.(gv-\theta);$$

$$u = \frac{1}{h^2.(1+\gamma^2)}.\{1+\tfrac{1}{4}\gamma^2+e.\cos.(cv-\varpi)-\tfrac{1}{4}\gamma^2.\cos.(2gv-2\theta)\}.$$

Si l'on substitue cette valeur de u, dans l'expression de dt du n°. 1, et si l'on observe qu'en négligeant l'attraction solaire, $\left(\frac{dQ}{dv}\right)$ est nul ; on aura

$$dt = h^3.dv.\left\{\begin{array}{l}1+\frac{3}{2}.(e^2+\gamma^2)-2e.(1+\frac{3}{2}e^2+\frac{1}{4}\gamma^2).\cos.(cv-\varpi)\\ +\frac{3}{2}.e^2.\cos.(2cv-2\varpi)-e^3.\cos.(3cv-3\varpi)+\frac{1}{2}\gamma^2.\cos.(2gv-2\theta)\\ -\frac{3}{4}.e\gamma^2.\{\cos.(2gv+cv-2\theta-\varpi)+\cos.(2gv-cv-2\theta+\varpi)\}\end{array}\right\};$$

ce qui donne en intégrant,

$$t = \text{const.}+h^3.v.(1+\tfrac{3}{2}e^2+\tfrac{3}{2}.\gamma^2)-\frac{2h^3.e}{c}.(1+\tfrac{3}{2}e^2+\tfrac{1}{4}\gamma^2).\sin.(cv-\varpi)$$
$$+\frac{3h^3.e^2}{4c}.\sin(2cv-2\varpi)-\frac{h^3.e^3}{3c}.\sin.(3cv-3\varpi)+\frac{h^3.\gamma^2}{4g}.\sin.(2gv-2\theta)$$
$$-\frac{3h^3.e\gamma^2}{4.(2g+c)}.\sin.(2gv+cv-2\theta-\varpi)-\frac{3h^3.e\gamma^2}{4.(2g-c)}.\sin.(2gv-cv-2\theta+\varpi).$$

Les coëfficiens de cette intégrale sont un peu modifiés par l'action du soleil, comme on le verra dans la suite.

Dans l'hypothèse elliptique, le coëfficient de v de cette expression, est par le n°. 16 du second livre, égal à $a^{\frac{3}{2}}$; ce qui donne

$$h^3.(1+\tfrac{3}{2}e^2+\tfrac{3}{2}\gamma^2) = a^{\frac{3}{2}}$$

a étant le demi-grand axe de l'ellipse ; on a donc alors,

$$h = a^{\frac{1}{2}}.(1-\tfrac{1}{2}e^2-\tfrac{1}{2}\gamma^2);$$

et par conséquent,

$$u=\frac{1}{a}\cdot\{1+e^2+\tfrac{1}{4}\gamma^2+e.(1+e^2).\cos.(cv-\varpi)-\tfrac{1}{4}\gamma^2.\cos.(2gv-2\theta)\}.$$

En faisant ensuite $n=a^{-\frac{3}{2}}$; on aura

$$nt+\varepsilon=v-\frac{2e}{c}.(1-\tfrac{1}{4}\gamma^2).\sin.(cv-\varpi)+\frac{3e^2}{4c}.\sin.(2cv-2\varpi)$$
$$-\frac{e^3}{3c}.\sin.(3cv-3\varpi)+\frac{\gamma^2}{4g}.\sin.(2gv-2\theta)$$
$$-\frac{3e\gamma^2}{4.(2g+c)}.\sin.(2gv+cv-2\theta-\varpi)-\frac{3e\gamma^2}{4.(2g-c)}.\sin.(2gv-cv-2\theta+\varpi);$$

ε étant une arbitraire. Dans la substitution de $nt+\varepsilon$, on pourra supposer c et g égaux à l'unité, et négliger les quantités de l'ordre e^3, ou $e\gamma^2$, dans les coëfficiens des sinus. On aura ainsi, en conservant le terme dépendant de $\sin.(2gv-cv-2\theta+\varpi)$, qui nous sera utile,

$$nt+\varepsilon=v-2e.\sin.(cv-\varpi)+\tfrac{3}{4}e^2.\sin.(2cv-2\varpi)+\tfrac{1}{4}\gamma^2.\sin.(2gv-2\theta)$$
$$-\tfrac{3}{4}e\gamma^2.\sin.(2gv-cv-2\theta+\varpi).$$

En marquant d'un trait pour le soleil, les quantités relatives à la lune, et observant que $\gamma'=0$, on aura

$$n't+\varepsilon'=v'-2e'.\sin.(c'v'-\varpi')+\tfrac{3}{4}e'^2.\sin.(2c'v'-2\varpi');$$
$$u'=\frac{1}{a'}.\{1+e'^2+e'.(1+e'^2).\cos.(c'v'-\varpi')\}.$$

L'origine du temps t étant arbitraire, nous pouvons supposer ε et ε' nuls, et alors en faisant $\frac{n'}{n}=m$, la comparaison des valeurs de nt et de $n't$, donnera

$$v'-2e'.\sin.(c'v'-\varpi')+\tfrac{3}{4}e'^2.\sin.(2c'v'-2\varpi')$$
$$=mv-2me.\sin.(cv-\varpi)+\tfrac{3}{4}me^2.\sin.(2cv-2\varpi)$$
$$+\tfrac{1}{4}m.\gamma^2.\sin.(2gv-2\theta)-\tfrac{3}{4}me\gamma^2.\sin.(2gv-cv-2\theta+\varpi);$$

d'où l'on tire, en observant que c' est extrêmement peu différent de l'unité,

$$v' = mv - 2me.\sin.(cv - \varpi) + \tfrac{3}{4}.me^2.\sin.(2cv - 2\varpi)$$
$$+ \tfrac{1}{4}.m\gamma^2.\sin.(2gv - 2\theta) - \tfrac{3}{4}me\gamma^2.\sin.(2gv - cv - 2\theta + \varpi)$$
$$+ 2e'.(1 - \tfrac{1}{8}e'^2).\sin.(c'mv - \varpi') - 2mee'.\sin.(cv + c'mv - \varpi - \varpi')$$
$$- 2mee'.\sin.(cv - c'mv - \varpi + \varpi') + \tfrac{5}{4}e'^2.\sin.(2c'mv - 2\varpi');$$

$$u' = \frac{1}{a'}.\left\{\begin{array}{l} 1 + e'.(1 - \tfrac{1}{8}e'^2).\cos.(c'mv - \varpi') + e'^2.\cos.(2c'mv - 2\varpi') \\ + mee'.\cos.(cv - c'mv - \varpi + \varpi') - mee'.\cos.(cv + c'mv - \varpi - \varpi') \end{array}\right\}.$$

5. On substituera ces valeurs de u, u', s et v', dans l'expression de Q et de ses différences partielles, que l'on développera ainsi en sinus et cosinus d'angles proportionnels à v : mais il est nécessaire, pour ce développement, d'établir quelques principes relatifs au degré de petitesse des quantités qui entrent dans ces fonctions, et à l'influence des intégrations successives sur leurs différens termes.

La valeur de m et à-peu-près égale à la fraction $\frac{1}{13}$: nous la regarderons comme une quantité très-petite du premier ordre. Les excentricités des orbites du soleil et de la lune, et l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique, sont à-peu-près du même degré de petitesse. Nous regarderons ainsi les carrés et les produits de ces quantités, comme très-petits du second ordre; leurs cubes et leurs produits de trois dimensions, comme très-petits du troisième ordre, et ainsi de suite. La force perturbatrice du soleil est de l'ordre $\frac{m'.u'^3}{u^3}$, et l'on a vu dans le n°. 3, que cette quantité est de l'ordre m^2, ou du second ordre. La fraction $\frac{a}{a'}$ étant à-peu-près égale à $\frac{1}{400}$, elle peut être considérée comme étant du second ordre. Nous porterons d'abord les approximations jusqu'aux inégalités du troisième ordre inclusivement, et dans le calcul de ces inégalités, nous aurons égard aux quantités du quatrième ordre; mais il faut une attention particulière, pour ne laisser échapper dans les intégrales, aucune quantité de cet ordre.

Le développement de la seconde des équations (L) du n°. 1, lui donne la forme suivante,

$$0 = \frac{ddu}{dv^2} + N^2.u + \Pi;$$

N^2 ne différant de l'unité, que d'une quantité de l'ordre m^2, et Π étant une suite de cosinus de la forme $k.\cos.(iv+\varepsilon)$. La partie de u relative à ce cosinus, est, par le n°. 41 du second livre, égale à

$$\frac{k}{i^2-N^2}.\cos.(iv+\varepsilon);$$

or il est clair que si i^2 ne diffère de l'unité, que d'une quantité de l'ordre m, le terme $k.\cos.(iv+\varepsilon)$ acquiert par l'intégration, un diviseur de cet ordre, et par conséquent il devient beaucoup plus considérable et de l'ordre $r-1$, s'il est de l'ordre r, dans l'équation différentielle. On verra dans la suite, que c'est à cela qu'est due la grandeur de l'inégalité nommée *évection*.

Les termes dans lesquels i est fort petit, et qui ne se rapportent qu'au mouvement du soleil, n'augmentent point par l'intégration, dans la valeur de u; mais il est visible par la première des équations (L) du n°. 1, que ces termes acquièrent le diviseur i, par l'intégration, dans l'expression du temps t; il faut donc faire une grande attention à ces termes. C'est de-là que dépend la grandeur de l'équation nommée *équation annuelle*.

Les termes de la forme $kdv.\sin.(iv+\varepsilon)$ de l'expression de $\left(\frac{dQ}{dv}\right).\frac{dv}{u^2}$, acquièrent par l'intégration de cette expression différentielle, un diviseur de l'ordre i, dans la valeur de u; d'où il semble que dans l'expression du temps t, ils doivent acquérir un diviseur de l'ordre i^2, ce qui rendroit ces termes fort grands, lorsque i est très-petit; mais il est essentiel d'observer que cela n'est pas, et que si l'on n'a égard qu'à la première puissance de la force perturbatrice, ces termes n'ont point, dans l'expression du temps, de diviseur de l'ordre i^2. Pour le faire voir, nous observerons que par le chapitre VIII du second livre, l'expression de v en fonction du temps, ne peut acquérir de diviseur de l'ordre i^2, que par la fonction $-3a.\int ndt.\int dQ$, la différentielle dQ étant uniquement relative aux coordonnées de la lune. Si Q contient un terme de la forme $k.\cos.(it+\varepsilon)$, i étant fort petit; ce terme ne peut acquérir un diviseur de l'ordre i^2, qu'autant que dQ n'acquiert point un multiplicateur de l'ordre i: la partie de l'angle it, relative à la lune, ne peut dépendre que des moyens mouvemens de la lune, de son périgée

et de ses nœuds, lorsque l'on n'a point égard au carré de la force perturbatrice; cette partie, si i est fort petit, ne dépend point du moyen mouvement de la lune; elle ne peut donc alors dépendre que des mouvemens de son périgée et de ses nœuds. Dans ce cas, dQ acquiert un multiplicateur de l'ordre de ces mouvemens, c'est-à-dire, du second ordre; ce qui fait perdre au terme dont il s'agit, son diviseur de l'ordre i^2. Les angles croissans avec lenteur, n'ont donc, dans l'expression de la longitude vraie en fonction du temps, qu'un diviseur de l'ordre i; et il est aisé d'en conclure que cela a également lieu dans l'expression du temps en fonction de la longitude vraie. Mais si l'on a égard au carré de la force perturbatrice, la partie de l'angle it, relative aux coordonnées de la lune, peut renfermer le moyen mouvement du soleil, et alors la différentielle dQ n'acquiert qu'un multiplicateur du premier ordre, ou de l'ordre de m. On pourra, d'après ces principes, juger de l'ordre auquel les divers termes des équations différentielles s'abaissent dans les expressions finies des coordonnées.

6. Développons, d'après ces considérations, les différens termes de la seconde des équations (L) du n°. 1. Dans l'hypothèse elliptique, la partie constante de u seroit $\frac{1}{a}.(1+e^2+\frac{1}{4}\gamma^2+\epsilon)$, ϵ étant une fonction de la quatrième dimension en e et γ; et l'on auroit

$$h^2=a.(1-e^2-\gamma^2+\epsilon'),$$

ϵ' étant pareillement une fonction de la quatrième dimension en e et γ. L'action du soleil altère cette partie constante de u; mais a étant arbitraire, nous pouvons supposer que $\frac{1}{a}.(1+e^2+\frac{1}{4}\gamma^2+\epsilon)$ représente toujours la partie constante de u. Dans ce cas, on n'aura plus $h^2=a.(1-e^2-\gamma^2+\epsilon')$: nous ferons alors $h^2=a_{,}.(1-e^2-\gamma^2+\epsilon')$, $a_{,}$ étant une arbitraire qui, sans l'action du soleil, coïncideroit avec a. Nous ferons ensuite $\frac{m'.a^3}{a'^3}=\bar{m}^2$. Cela posé, le terme $\frac{m'.u'^3}{2h^2.u^3}$ de l'expression de $-\frac{1}{h^2}.\left(\frac{dQ}{du}\right)-\frac{s}{h^2u}.\left(\frac{dQ}{ds}\right)$, deviendra par son développement

$$\frac{\overline{m}^2}{2a_{,}}\cdot\left\{\begin{array}{l}
1+e^2+\tfrac{1}{4}\gamma^2+\tfrac{3}{2}e'^2 \\
-3e.(1+\tfrac{1}{2}e^2+\tfrac{3}{2}e'^2).\cos.(cv-\varpi) \\
+3e'.(1+e^2+\tfrac{1}{4}\gamma^2+\tfrac{9}{8}.e'^2).\cos.(c'mv-\varpi') \\
-\tfrac{3}{2}.(3+2m).ee'.\cos.(cv+c'mv-\varpi-\varpi') \\
-\tfrac{3}{2}.(3-2m).ee'.\cos.(cv-c'mv-\varpi+\varpi') \\
+3e^2.\cos.(2cv-2\varpi) \\
+\tfrac{3}{4}\gamma^2.\cos.(2gv-2\theta) \\
+\tfrac{9}{2}.e'^2.\cos.(2c'mv-2\varpi') \\
-\tfrac{3}{2}.e\gamma^2.\cos.(2gv-cv-2\theta+\varpi)
\end{array}\right\}.$$

Pour développer le terme $\frac{3m'.u'^3}{2h^2u^3}.\cos.(2v-2v')$ de l'expression de $-\frac{1}{h^2}.\left(\frac{dQ}{du}\right)-\frac{s}{h^2u}.\left(\frac{dQ}{ds}\right)$, nous allons d'abord donner le développement de $3m'.u'^3.\cos.(2v-2v')$. Ce terme développé devient

$$\frac{3m'}{a'^3}.\left\{\begin{array}{l}
(1-\tfrac{5}{2}e'^2-4m^2.e^2).\cos.(2v-2mv) \\
+\tfrac{7}{2}e'.\cos.(2v-2mv-c'mv+\varpi') \\
-\tfrac{1}{2}e'.\cos.(2v-2mv+c'mv-\varpi') \\
+2me.\cos.(2v-2mv+cv-\varpi) \\
-2me.\cos.(2v-2mv-cv+\varpi) \\
+\tfrac{17}{2}.e'^2.\cos.(2v-2mv-2c'mv+2\varpi') \\
-\tfrac{21}{2}.mee'.\cos.(2v-2mv-cv-c'mv+\varpi+\varpi') \\
+\tfrac{21}{2}.mee'.\cos.(2v-2mv+cv-c'mv-\varpi+\varpi') \\
-\tfrac{1}{2}mee'.\cos.(2v-2mv+cv+c'mv-\varpi-\varpi') \\
+\tfrac{1}{2}mee'.\cos.(2v-2mv-cv+c'mv+\varpi-\varpi') \\
+m.\dfrac{(3+8m)}{4}.e^2.\cos.(2cv-2v+2mv-2\varpi) \\
-m.\dfrac{(3-8m)}{4}.e^2.\cos.(2cv+2v-2mv-2\varpi) \\
+\dfrac{m\gamma^2}{4}.\cos.(2gv-2v+2mv-2\theta) \\
-\dfrac{m\gamma^2}{4}.\cos.(2gv+2v-2mv-2\theta) \\
-\dfrac{3m.e\gamma^2}{4}.\cos.(2v-2mv-2gv+cv+2\theta-\varpi)
\end{array}\right\}.$$

Il faut multiplier cette fonction par $\frac{1}{2h^2.u^3}$; et l'on a ce facteur, en

faisant

faisant e' nul, dans le développement précédent de $\frac{m'.u'^3}{2h^2.u^3}$, et en multipliant cette dernière quantité, par $\frac{a'^3}{m'}$; on aura ainsi, à très-peu-près, en négligeant les quantités qui restent de l'ordre m^5 après les intégrations

$$\frac{3m'.u'^3}{2h^2.u^3}.\cos.(2v-2v')=\frac{3.\bar{m}^2}{2a_{,}}.\left\{\begin{array}{l}(1+e^2+\frac{1}{4}\gamma^2-\frac{5}{2}e'^2).\cos.(2v-2mv) \\ -\frac{(3+4m)}{2}.e.(1+\frac{1}{2}e^2-\frac{5}{2}.e'^2).\cos.(2v-2mv-cv+\varpi) \\ -\frac{(3-4m)}{2}.e.\cos.(2v-2mv+cv-\varpi) \\ +\frac{7}{2}e'.\cos.(2v-2mv-c'mv+\varpi') \\ -\frac{1}{2}e'.\cos.(2v-2mv+c'mv-\varpi') \\ -\frac{21.(1+2m)}{4}.ee'.\cos.(2v-2mv-cv-c'mv+\varpi+\varpi') \\ -\frac{21.(1-2m)}{4}.ee'.\cos.(2v-2mv+cv-c'mv-\varpi+\varpi') \\ +\frac{(3+2m)}{4}.ee'.\cos.(2v-2mv-cv+c'mv+\varpi-\varpi') \\ +\frac{(3-2m)}{4}.ee'.\cos.(2v-2mv+cv+c'mv-\varpi-\varpi') \\ +\frac{17}{2}.e'^2.\cos.(2v-2mv-2c'mv+2\varpi') \\ +\frac{(6+15.m+8.m^2)}{4}.e^2.\cos.(2cv-2v+2mv-2\varpi) \\ +\frac{(6-15.m+8.m^2)}{4}.e^2.\cos.(2cv+2v-2mv-2\varpi) \\ +\frac{(3+2m)}{8}.\gamma^2.\cos.(2gv-2v+2mv-2\theta) \\ +\frac{(3-2m)}{8}.\gamma^2.\cos.(2gv+2v-2mv-2\theta) \\ -\frac{3.(2+m)}{8}.e\gamma^2.\cos.(2v-2mv-2gv+cv+2\theta-\varpi)\end{array}\right\}.$$

Le terme $\frac{9m'.u'^4}{8h^2.u^4}.\cos.(v-v')$ de l'expression de $-\frac{1}{h^2}.\left(\frac{dQ}{du}\right)-\frac{s}{h^2u}.\left(\frac{dQ}{ds}\right)$, donne les suivans,

$$\frac{9.\overline{m}^2}{8a_{,}}.(1+2e^2+2e'^2).\frac{a}{a'}.\cos.(v-mv)$$

$$+\frac{9.\overline{m}^2}{8a_{,}}.\frac{a}{a'}.e'.\cos.(v-mv+c'mv-\varpi')$$

$$+\frac{27.\overline{m}^2}{8a_{,}}.\frac{a}{a'}.e'.\cos.(v-mv-c'mv+\varpi').$$

$\frac{a}{a'}$ étant par le n°. précédent, de l'ordre m^2; les deux premiers de ces termes deviennent de l'ordre m^3 par les intégrations. L'inégalité dépendante de l'angle $v-mv$, étant très-propre à faire connoître la parallaxe du soleil, donnée par le rapport $\frac{a}{a'}$; il importe de la déterminer avec un soin particulier : je porterai par cette raison, dans le calcul de cette inégalité, l'approximation jusqu'aux termes de l'ordre m^5 inclusivement.

Développons maintenant le terme $\left(\frac{dQ}{dv}\right).\frac{du}{h^2.u^2dv}$ de la seconde des équations (L) du n°. 1. Ce terme contient d'abord le suivant, $-\frac{3m'.u'^3}{2h^2.u^4}.\frac{du}{dv}.\sin.(2v-2v')$. On aura $-\frac{3m'.u'^3}{2h^2.u^3}.\sin.(2v-2v')$, en augmentant $2v$ d'un angle droit, dans le développement précédent de $\frac{3m'.u'^3}{2h^2.u^3}.\cos.(2v-2v')$. Il faut ensuite multiplier ce développement par $\frac{du}{udv}$, ou par

$$\begin{aligned}
&-ce.(1+\tfrac{1}{4}e^2-\tfrac{1}{4}\gamma^2).\sin.(cv-\varpi)\\
&+\tfrac{1}{2}ce^2.\sin.(2cv-2\varpi)\\
&-\tfrac{1}{4}.ce^3.\sin.(3cv-3\varpi)\\
&+\tfrac{1}{2}g\gamma^2.\sin.(2gv-2\theta)\\
&-\tfrac{1}{2}.e\gamma^2.\sin.(2gv-cv-2\theta+\varpi).
\end{aligned}$$

On aura ainsi,

$$-\frac{3m'.u'^3}{2h^2.u^4}\cdot\frac{du}{dv}.\sin.(2v-2v')=\frac{3.\overline{m}^2}{4a_{,}}\cdot\left\{\begin{array}{l} ce.\left(1+\frac{(2-19.m)}{4}.e^2-\frac{5}{2}e'^2\right).\cos.(2v-2mv-cv+\varpi) \\ -ce.\cos.(2v-2mv+cv-\varpi) \\ +\frac{7}{2}.cee'.\cos.(2v-2mv-cv-c'mv+\varpi+\varpi') \\ -\frac{7}{2}.cee'.\cos.(2v-2mv+cv-c'mv-\varpi+\varpi') \\ -\frac{1}{2}.cee'.\cos.(2v-2mv-cv+c'mv+\varpi-\varpi') \\ +\frac{1}{2}.cee'.\cos.(2v-2mv+cv+c'mv-\varpi-\varpi') \\ -2c.(1+m).e^2.\cos.(2cv-2v+2mv-2\varpi) \\ +2c.(1-m).e^2.\cos.(2cv+2v-2mv-2\varpi) \\ +4mc.e^2.\cos.(2v-2mv) \\ -\frac{g}{2}.\gamma^2.\cos.(2gv-2v+2mv-2\theta) \\ +\frac{g}{2}.\gamma^2.\cos.(2gv+2v-2mv-2\theta) \\ +\frac{(2-5m)}{4}.e\gamma^2.\cos.(2v-2mv-2gv+cv+2\theta-\varpi) \end{array}\right\}$$

Les termes

$$-\frac{m'.u'^4}{8h^2.u^5}.\{3.\sin.(v-v')+15.\sin.(3v-3v')\}.\frac{du}{dv}$$

de l'expression de $\left(\frac{dQ}{dv}\right).\frac{du}{h^2u^2dv}$, ne produisent aucune inégalité de troisième ordre dans les intégrales.

Développons enfin le terme $\frac{2}{h^2}.\int\left(\frac{dQ}{dv}\right).\frac{dv}{u^2}$. Ce terme contient le suivant, $-\frac{3m'}{h^2}.\int\frac{u'^3.dv}{u^4}.\sin.(2v-2v')$. Le développement précédent de $\frac{3m'.u'^3}{2h^2.u^3}.\cos.(2v-2v')$, donne celui de $-\frac{3m'.u'^3}{h^2u^4}.\sin.(2v-2v')$, en y augmentant $2v$ d'un angle droit, et en le multipliant par $\frac{2}{u}$, ou par

$$2a.\left\{\begin{array}{l} 1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}\gamma^2 \\ -e.(1-\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{2}\gamma^2).\cos.(cv-\varpi) \\ +\frac{1}{2}.e^2.\cos.(2cv-2\varpi) \\ +\frac{1}{4}\gamma^2.\cos.(2gv-2\theta) \\ -\frac{1}{4}e\gamma^2.\cos.(2gv-cv-2\theta+\varpi) \end{array}\right\}$$

On aura ainsi,

$$\frac{3m'}{h^2}\cdot\int\frac{u'^3.dv}{u^4}.\sin.(2v-2v')$$

$$=3.\overset{-2}{m}.\frac{a}{a_{\prime}}.\left\{\begin{array}{l}\frac{(1+2e^2-\frac{5}{2}e'^2)}{2-2m}.\cos.(2v-2mv)\\
-\frac{2.(1+m)}{2-2m-c}.\{1+\frac{3}{4}e^2-\frac{1}{4}\gamma^2-\frac{5}{2}e'^2\}.e.\cos.(2v-2mv-cv+\varpi)\\
-\frac{2.(1-m)}{2-2m+c}.e.\cos.(2v-2mv+cv-\varpi)\\
+\frac{7e'}{2.(2-3m)}.\cos.(2v-2mv-c'mv+\varpi')\\
-\frac{e'}{2.(2-m)}.\cos.(2v-2mv+c'mv-\varpi')\\
-\frac{7.(2+3m).ee'}{2.(2-3m-c)}.\cos.(2v-2mv-cv-c'mv+\varpi+\varpi')\\
-\frac{7.(2-3m).ee'}{2.(2-3m+c)}.\cos.(2v-2mv+cv-c'mv-\varpi+\varpi')\\
+\frac{(2+m).ee'}{2.(2-m-c)}.\cos.(2v-2mv-cv+c'mv+\varpi-\varpi')\\
+\frac{(2-m).ee'}{2.(2-m+c)}.\cos.(2v-2mv+cv+c'mv-\varpi-\varpi')\\
-\frac{(10+19.m+8.m^2)}{4.(2c-2+2m)}.e^2.\cos.(2cv-2v+2mv-2\varpi)\\
+\frac{(10-19m+8m^2)}{4.(2c+2-2m)}.e^2.\cos.(2cv+2v-2mv-2\varpi)\\
-\frac{(2+m)}{4.(2g-2+2m)}.\gamma^2.\cos.(2gv-2v+2mv-2\theta)\\
+\frac{(2-m)}{4.(2g+2-2m)}.\gamma^2.\cos.(2gv+2v-2mv-2\theta)\\
+\frac{17.e'^2}{2.(2-4m)}.\cos.(2v-2mv-2c'mv+2\varpi')\\
-\frac{(5+m)}{4.(2-2m-2g+c)}.e\gamma^2.\cos.(2v-2mv-2gv+cv+2\theta-\varpi)\end{array}\right\}.$$

Dans cette formule, les termes dépendans des angles $2cv-2v+2mv-2\varpi$, et $2gv-2v+2mv-2\theta$, ont des diviseurs de l'ordre m, et ils acquièrent de nouveau ces diviseurs par l'intégration, dans l'expression de la longitude moyenne de la lune ; ce qui les réduit au second ordre, et ce qui semble devoir donner de grandes valeurs aux inégalités relatives à ces angles. Mais on doit observer que par le n°. 5,

les termes qui ont pour diviseur le carré du coëfficient de v dans ces angles, se détruisent à très-peu-près dans l'expression de la longitude moyenne; en sorte que les inégalités dont il s'agit, deviennent du troisième ordre, et conformes au résultat des observations, comme on le verra dans la suite. On peut se dispenser, par cette raison, de considérer dans le calcul de ces inégalités, les quantités multipliées par e^4, $e^2\gamma^2$, et γ^4; car les quantités du quatrième ordre qui en résultent après les intégrations, se détruisent à très-peu-près.

L'intégrale $\frac{2}{h^2}.\int\left(\frac{dQ}{dv}\right).\frac{dv}{u^2}$ contient encore le terme

$$-\frac{3m'}{4h^2}.\int\frac{u'^4.dv}{u^5}.\sin.(v-v');$$

ce terme donne les suivans;

$$\frac{3.\overline{m}^2}{4}.\frac{a}{a_{,}}.\frac{a}{a'}.\left\{\begin{array}{l}\frac{(1+\frac{7}{2}e^2-\frac{1}{4}\gamma^2+2e'^2)}{1-m}.\cos.(v-mv)\\ +e'.\cos.(v-mv+c'mv-\varpi')\\ +\frac{3e'}{1-2m}.\cos.(v-mv-c'mv+\varpi')\end{array}\right\};$$

les autres termes de la même intégrale peuvent être ici négligés. Cela posé, si l'on observe que l'expression de u du n°. 4, donne,

$$\frac{ddu}{dv^2}+u=\frac{1}{a}.\left\{\begin{array}{l}1+e^2+\frac{\gamma^2}{4}\\ +(1-c^2).e.\cos.(cv-\varpi)\\ +\frac{(4g^2-1)}{4}.\gamma^2.\cos.(2gv-2\theta)\end{array}\right\};$$

le terme $\left(\frac{ddu}{dv^2}+u\right).\frac{2}{h^2}.\int\left(\frac{dQ}{dv}\right).\frac{dv}{u^2}$ de la seconde des équations (L) du n°. 1, donnera par son développement,

$$\frac{3.\overline{m}^2}{a_{,}}.\left\{\begin{array}{l}\frac{\left(1+3e^2+\frac{\gamma^2}{4}-\frac{5}{2}e'^2\right)}{2-2m}.\cos(2v-2mv)\\ +\left\{\frac{1-c^2}{4.(1-m)}-\frac{2.(1+m)}{2-2m-c}.(1+\frac{7}{4}e^2-\frac{5}{2}e'^2)\right\}.e.\cos.(2v-2mv-cv+\varpi)\\ -\frac{2.(1-m)}{2-2m+c}.e.\cos.(2v-2mv+cv-\varpi)\\ +\frac{7e'}{2.(2-3m)}.\cos.(2v-2mv-c'mv+\varpi')\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}
-\frac{e'}{2.(2-m)}.\cos.(2v-2mv+c'mv-\varpi') \\
-\frac{7.(2+3m)}{2.(2-3m-c)}.ee'.\cos.(2v-2mv-cv-c'mv+\varpi+\varpi') \\
-\frac{7.(2-3m)}{2.(2-3m+c)}.ee'.\cos.(2v-2mv+cv-c'mv-\varpi+\varpi') \\
+\frac{(2+m)}{2.(2-m-c)}.ee'.\cos.(2v-2mv-cv+c'mv+\varpi-\varpi') \\
+\frac{(2-m)}{2.(2-m+c)}.ee'.\cos.(2v-2mv+cv+c'mv-\varpi-\varpi') \\
-\frac{(10+19m+8m^2)}{4.(2c-2+2m)}.e^2.\cos.(2cv-2v+2mv-2\varpi) \\
+\frac{(10-19m+8m^2)}{4.(2c+2-2m)}.e^2.\cos.(2cv+2v-2mv-2\varpi) \\
+\left\{\frac{4g^2-1}{16.(1-m)}-\frac{(2+m)}{4.(2g-2+2m)}\right\}.\gamma^2.\cos.(2gv-2v+2mv-2\theta) \\
+\left\{\frac{4g^2-1}{16.(1-m)}+\frac{(2-m)}{4.(2g+2-2m)}\right\}.\gamma^2.\cos.(2gv+2v-2mv-2\theta) \\
+\frac{17.e'^2}{2.(2-4m)}.\cos.(2v-2mv-2c'mv+2\varpi') \\
-\left\{\frac{5+m}{4.(2-2m-2g+c)}+\frac{3.(1-m)}{4.(2-2m+c)}\right\}.e\gamma^2.\cos.(2v-2mv-2gv+cv+2\theta-\varpi) \\
+\frac{(1+\frac{9}{4}e^2+2e'^2)}{4.(1-m)}.\frac{a}{a'}.\cos.(v-mv) \\
+\frac{1}{4}.\frac{a}{a'}.e'.\cos.(v-mv+c'mv-\varpi') \\
+\frac{3}{4.(1-2m)}.\frac{a}{a'}.e'.\cos.(v-mv-c'mv+\varpi')
\end{array}\right\}$$

7. Le terme $-\frac{1}{h^2(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}$ de l'expression de

$$-\frac{1}{h^2}.\left(\frac{dQ}{du}\right)-\frac{s}{h^2 u}.\left(\frac{dQ}{ds}\right),$$

devient en négligeant les inégalités du quatrième ordre,

$$-\frac{1}{a_{,}}.\left\{1+e^2+\frac{\gamma^2}{4}+\frac{3}{4}.\gamma^2.(1+e^2-\tfrac{1}{4}\gamma^2).\cos.(2gv-2\theta)+\zeta''\right\}+\frac{3s\delta s}{h^2};$$

ζ'' étant une fonction de la quatrième dimension en e et γ, et δs étant la partie de s due à l'action de la force perturbatrice. On verra ci-après que δs est de cette forme,

$$\begin{aligned}\delta s = & B_1^{(0)}.\gamma.\sin.(2v-2mv-gv+\theta)\\
&+B_2^{(1)}.\gamma.\sin.(2v-2mv+gv-\theta)\\
&+B_2^{(2)}.e\gamma.\sin.(gv+cv-\theta-\varpi)\\
&+B_2^{(3)}.e\gamma.\sin.(gv-cv-\theta+\varpi)\\
&+B_2^{(4)}.e\gamma.\sin.(2v-2mv-gv+cv+\theta-\varpi)\\
&+B_2^{(5)}.e\gamma.\sin.(2v-2mv+gv-cv-\theta+\varpi)\\
&+B_2^{(6)}.e\gamma.\sin.(2v-2mv-gv-cv+\theta+\varpi)\\
&+B_1^{(7)}.e'\gamma.\sin.(gv+c'mv-\theta-\varpi')\\
&+B_1^{(8)}.e'\gamma.\sin.(gv-c'mv-\theta+\varpi')\\
&+B_1^{(9)}.e'\gamma.\sin.(2v-2mv-gv+c'mv+\theta-\varpi')\\
&+B_1^{(10)}.e'\gamma.\sin.(2v-2mv-gv-c'mv+\theta+\varpi')\\
&+B_0^{(11)}.e^2\gamma.\sin.(2cv-gv-2\varpi+\theta)\\
&+B_1^{(12)}.e^2\gamma.\sin.(2v-2mv-2cv+gv+2\varpi-\theta)\\
&+B_1^{(13)}.e^2\gamma.\sin.(2cv+gv-2v+2mv-2\varpi-\theta)\\
&+B_2^{(14)}.\frac{a}{a'}.\gamma.\sin.(gv-v+mv-\theta)\\
&+B_2^{(15)}.\frac{a}{a'}.\gamma.\sin.(gv+v-mv-\theta).\end{aligned}$$

Les nombres placés au bas de la lettre B, indiquent l'ordre de cette lettre. Ainsi, $B_1^{(0)}$ est du premier ordre; $B_2^{(2)}$ est du second ordre; et $B_0^{(11)}$ est fini. On peut observer que cela a lieu, suivant que le nombre qui multiplie l'angle v dans le sinus correspondant, diffère de l'unité, d'une quantité de l'ordre m; ou d'un nombre fini, c'est-à-dire, de l'ordre zéro; ou d'une quantité de l'ordre m^2; parce que l'intégration fait acquérir à ces termes, un diviseur du même ordre. On aura, cela posé,

$$\begin{aligned}\frac{3s.\delta s}{h^2} = & -\frac{3}{2a_{,}}.\{B_1^{(0)}-B_2^{(1)}\}.\gamma^2.\cos.(2v-2mv)\\
&+\frac{3}{2a_{,}}.B_1^{(0)}.\gamma^2.\cos.(2v-2mv-2gv+2\theta)\\
&+\frac{3}{2a_{,}}.\{B_2^{(2)}+B_2^{(3)}\}.e\gamma^2.\cos.(cv-\varpi)\\
&-\frac{3}{2a_{,}}.B_2^{(3)}.e\gamma^2.\cos.(2gv-cv-2\theta+\varpi)\\
&+\frac{3}{2a_{,}}.B_2^{(4)}.e\gamma^2.\cos.(2v-2mv-2gv+cv+2\theta-\varpi)\\
&+\frac{3}{2a_{,}}.\{B_2^{(5)}-B_2^{(6)}\}.e\gamma^2.\cos.(2v-2mv-cv+\varpi)\end{aligned}$$

$$+\frac{3}{2a_{,}}.\{B_{1}^{(7)}+B_{1}^{(8)}\}.e'\gamma^{2}.\cos.(c'mv-\varpi')$$

$$-\frac{3}{2a_{,}}.B_{1}^{(9)}.e'\gamma^{2}.\cos.(2v-2mv+c'mv-\varpi')$$

$$-\frac{3}{2a_{,}}.B_{1}^{(10)}.e'\gamma^{2}.\cos.(2v-2mv-c'mv+\varpi')$$

$$-\frac{3}{2a_{,}}.B_{0}^{(11)}.e^{2}\gamma^{2}.\cos.(2cv-2\varpi)$$

$$+\frac{3}{2a_{,}}.\{B_{2}^{(14)}+B_{2}^{(15)}\}.\frac{a}{a'}.\gamma^{2}.\cos.(v-mv).$$

Si l'on réunit les différens termes que nous venons de développer, la seconde des équations (L) du n°. 1 prendra cette forme,

$$o=\frac{ddu}{dv^{2}}+u+\Pi;$$

Π étant une fonction rationnelle et entière de constantes, de sinus et de cosinus d'angles proportionnels à v; mais comme nous nous proposons d'avoir égard à toutes les inégalités du troisième ordre, et aux quantités du quatrième ordre qui les multiplient; il faut joindre aux termes précédens, tous ceux qui dépendans du carré de la force perturbatrice, deviennent de ces ordres, par les intégrations. Analysons ces nouveaux termes.

8. Pour cela, supposons que δu soit la partie de u, due à la force perturbatrice, et que l'on ait

$$\begin{aligned}a\delta u = {} & A_{2}^{(0)}.\cos.(2v-2mv)\\
&+A_{1}^{(1)}.e.\cos.(2v-2mv-cv+\varpi)\\
&+A_{2}^{(2)}.e.\cos.(2v-2mv+cv-\varpi)\\
&+A_{2}^{(3)}.e'.\cos.(2v-2mv+c'mv-\varpi')\\
&+A_{2}^{(4)}.e'.\cos.(2v-2mv-c'mv+\varpi')\\
&+A_{2}^{(5)}.e'.\cos.(c'mv-\varpi')\\
&+A_{1}^{(6)}.ee'.\cos.(2v-2mv-cv+c'mv+\varpi-\varpi')\\
&+A_{1}^{(7)}.ee'.\cos.(2v-2mv-cv-c'mv+\varpi+\varpi')\\
&+A_{1}^{(8)}.ee'.\cos.(cv+c'mv-\varpi-\varpi')\\
&+A_{1}^{(9)}.ee'.\cos.(cv-c'mv-\varpi+\varpi')\\
&+A_{2}^{(10)}.e^{2}.\cos.(2cv-2\varpi)\\
&+A_{1}^{(11)}.e^{2}.\cos.(2cv-2v+2mv-2\varpi)\\
&+A_{2}^{(12)}.\gamma^{2}.\cos.(2gv-2\theta)\\
&+A_{1}^{(13)}.\gamma^{2}.\cos.(2gv-2v+2mv-2\theta)\end{aligned}$$

+

$$+A_2^{(14)}.e'^2.\cos.(2c'mv-2\varpi')$$
$$+A_0^{(15)}.e\gamma^2.\cos.(2gv-cv-2\theta+\varpi)$$
$$+A_1^{(16)}.e\gamma^2.\cos.(2v-2mv-2gv+cv+2\theta-\varpi)$$
$$+A_1^{(17)}.\frac{a}{a'}.\cos.(v-mv)$$
$$+A_0^{(18)}.\frac{a}{a'}.e'.\cos.(v-mv+c'mv-\varpi')$$
$$+A_1^{(19)}.\frac{a}{a'}.e'.\cos.(v-mv-c'mv+\varpi').$$

Les nombres 0, 1, 2, placés au bas de la lettre A, indiquent que la quantité est de l'ordre zéro, ou de l'ordre m, ou de l'ordre m^2. Je ne considère ici que les inégalités du troisième ordre, et celles qui étant du quatrième, peuvent produire des quantités du quatrième ordre, dans les coëfficiens des inégalités du troisième. Je porte l'approximation plus loin, relativement à l'inégalité dépendante de $\cos.(v-mv)$. Cela posé, le terme $\frac{m'.u'^3}{2h^2.u^3}$ donne par sa variation, le suivant $-\frac{3m'.u'^3.\delta u}{2h^2u^4}$; et il en résulte la fonction

$$-\frac{3.\overline{m}^2.(1+\frac{3}{2}e'^2)}{2a_,}.\left\{\begin{array}{l} a.\delta u \\ -2A_2^{(0)}.e.\cos.(2v-2mv-cv+\varpi) \\ -2A_1^{(1)}.e^2.\cos.(2v-2mv-2cv+2\varpi) \\ +\frac{3}{2}.A_1^{(1)}.ee'.\cos.(2v-2mv-cv+c'mv+\varpi-\varpi') \\ +\frac{3}{2}.A_1^{(1)}.ee'.\cos.(2v-2mv-cv-c'mv+\varpi+\varpi') \\ +\frac{3}{2}.(A_1^{(8)}+A_1^{(9)}).ee'^2.\cos.(cv-\varpi) \\ +\frac{3}{2}.A_1^{(17)}.\frac{a}{a'}.e'.\cos.(v-mv+c'mv-\varpi') \\ +\frac{3}{2}.A_1^{(17)}.\frac{a}{a'}.e'.\cos.(v-mv-c'mv+\varpi') \\ +\frac{3}{2}.A_0^{(18)}.\frac{a}{a'}.e'^2.\cos.(v-mv) \end{array}\right\}.$$

u' éprouve une variation par la variation de v' qui dépend du temps t, et de ses inégalités en fonction de v; mais ces inégalités sont multipliées par m, dans l'expression de v', et de plus, par e' dans l'expression de u'; on peut donc d'abord négliger ici sans erreur sensible, la variation $\delta u'$. Nous aurons bientôt égard au terme de cette variation, qui dépend de l'action de la lune sur la terre.

Le terme $\frac{3m'.u'^3}{2h^2.u^3}.\cos.(2v - 2v')$ a pour variation

$$-\frac{9m'.u'^3}{2h^2.u^4}.\delta u.\cos.(2v - 2v') + \frac{3m'.u'^3}{h^2.u^3}.\delta v'.\sin.(2v - 2v').$$

Si l'on substitue au lieu de δu sa valeur précédente, on trouve que le premier de ces deux termes donne la fonction

$$-\frac{9.\bar{m}^2}{4a_,}.\left\{\begin{array}{l} A_2^{(0)}.(1 - \frac{5}{2}e'^2) \\ + \{A_1^{(1)} - 4A_2^{(0)} + A_2^{(2)} - \frac{1}{2}.A_1^{(6)}.e'^2 + \frac{7}{2}.A_1^{(7)}.e'^2\}.e.(1 - \frac{5}{2}e'^2).\cos.(cv - \varpi) \\ + \{3A_2^{(0)} + A_2^{(3)} + A_2^{(4)}\}.e'.\cos.(c'mv - \varpi') \\ + \{A_1^{(6)} + \frac{7}{2}.A_1^{(1)}\}.ee'.\cos.(cv - c'mv - \varpi + \varpi') \\ + \{A_1^{(7)} - \frac{1}{2}.A_1^{(1)}\}.ee'.\cos.(cv + c'mv - \varpi - \varpi') \\ + A_1^{(8)}.ee'.\cos.(2v - 2mv - cv - c'mv + \varpi + \varpi') \\ + A_1^{(9)}.ee'.\cos.(2v - 2mv - cv + c'mv + \varpi - \varpi') \\ + \left\{A_1^{(16)} + \frac{(2+m)}{4}.A_1^{(1)} - 2.(1+m).A_1^{(13)}\right\}.e\gamma^2.\cos.(2gv - cv - 2\theta + \varpi) \\ + A_0^{(15)}.e\gamma^2.\cos.(2v - 2mv - 2gv + cv + 2\theta - \varpi) \\ + \{A_1^{(17)} - \frac{1}{2}.A_0^{(18)}.e'^2\}.\frac{a}{a'}.\cos.(v - mv) \\ + \{A_1^{(19)} - \frac{1}{2}.A_1^{(17)}\}.\frac{a}{a'}.e'.\cos.(v - mv + c'mv - \varpi') \\ + \{A_0^{(18)} + \frac{7}{2}.A_1^{(17)}\}.\frac{a}{a'}.e'.\cos.(v - mv - c'mv + \varpi') \end{array}\right\}.$$

$a\delta u$ contient un terme dépendant de $\cos.(3v - 3mv)$, que nous avons négligé à cause de sa petitesse ; mais comme il peut influer sur le terme dépendant de $\cos.(v - mv)$, nous aurons égard à cette influence. Pour cela, désignons-le par $\lambda_2.\frac{a}{a'}.\cos.(3v - 3mv)$; la fonction $-\frac{9m'.u'^3}{2h^2.u^4}.\delta u.\cos.(2v - 2v')$ donnera le terme,

$$-\frac{9.\bar{m}^2}{4a_,}.\lambda_2.\frac{a}{a'}.\cos.(v - mv).$$

Pour développer la variation $\frac{3m'.u'^3}{h^2u^3}.\delta v'.\sin.(2v - 2v')$, nous observerons que $\delta v'$ contient, par le n°. 4, les mêmes inégalités que l'expression de la longitude moyenne de la lune, en fonction de sa longitude vraie; mais elles y sont multipliées par la petite

quantité m. Il suffit ici d'avoir égard aux termes dans lesquels le coëfficient de v diffère peu de l'unité ; et il est aisé de voir que le terme $e.\cos.(cv-\varpi)$ de l'expression de au, donnant par le n°. 4, dans $\delta v'$, le terme $-2me.\sin.(cv-\varpi)$; un terme quelconque de $a\delta u$, tel que $k.\cos.(iv+\varepsilon)$, dans lequel i diffère peu de l'unité, donne à fort peu près dans $\delta v'$, le terme $-2mk.\sin.(iv+\varepsilon)$. On trouve ainsi que la variation précédente donne par son développement, la fonction

$$-\frac{3.\bar{m}^2}{a}.\left\{\begin{array}{l} m.A_{,}^{(1)}.e.(1-\frac{5}{2}e'^2).\cos.(cv-\varpi) \\ +\frac{1}{8}.m.A_{,}^{(1)}.e\gamma^2.\cos.(2gv-cv-2\theta+\varpi) \\ +m.A_0^{(15)}.e\gamma^2.\cos.(2v-2mv-2gv+cv+2\theta-\varpi) \\ +m.A_{,}^{(17)}.\frac{a}{a'}.\cos.(v-mv) \\ +m.A_0^{(18)}.\frac{a}{a'}.e'.\cos.(v-mv-c'mv+\varpi') \end{array}\right\};$$

les autres termes de ce développement sont insensibles.

Les termes

$$\frac{3m'.u'^4}{8h^2.u^4}.\{3.\cos.(v-v')+5.\cos.(3v-3v')\}$$

de l'expression de

$$-\frac{1}{h^2}.\left\{\left(\frac{dQ}{du}\right)+\frac{s}{u}.\left(\frac{dQ}{ds}\right)\right\},$$

ont pour variation,

$$-\frac{3.\bar{m}^2.a\delta u}{2a_{,}}.\frac{a}{a'}.\{3.\cos.(v-mv)+5.\cos.(3v-3mv)\};$$

en substituant pour $a\delta u$, $A_2^{(0)}.\cos.(2v-2mv)$; il en résulte le terme

$$-\frac{6.\bar{m}^2}{a_{,}}.A_2^{(0)}.\frac{a}{a'}.\cos.(v-mv).$$

La variation du terme

$$-\frac{3m'.u'^3}{2h^2.u^4}.\frac{du}{dv}.\sin.(2v-2v')$$

peut se réduire aux termes suivans,

$$\frac{6m'.u'^3}{h^2.u^4}.\frac{du}{dv}.\frac{\delta u}{u}.\sin.(2v-2v') - \frac{3m'.u'^3}{2h^2.u^4}.\frac{d\delta u}{dv}.\sin.(2v-2v')$$
$$+\frac{3m'.u'^3.\delta v'}{h^2.u^4}.\frac{du}{dv}.\cos.(2v-2v');$$

ces termes, par leur développement, produisent la quantité

$$\frac{3.\bar{m}^2}{4a_{,}}.\left\{\begin{array}{l}
2.(1-m).A_2^{(0)}.(1-\tfrac{1}{2}e'^2) \\
+\left\{\begin{array}{l}(2-2m-c).A_1^{(1)}+(2-2m+c).A_2^{(2)}-8.(1-m).A_2^{(0)} \\ +\tfrac{7}{2}.(2-3m-c).A_1^{(7)}.e'^2-\tfrac{1}{2}.(2-m-c).A_1^{(6)}.e'^2\end{array}\right\}.e.(1-\tfrac{1}{2}e'^2).\cos.(cv-\varpi) \\
+\{6.(1-m).A_2^{(0)}+(2-m).A_2^{(3)}+(2-3m).A_2^{(4)}\}.e'.\cos.(c'mv-\varpi') \\
+\{(2-3m-c).A_1^{(7)}-\tfrac{1}{2}.(2-2m-c).A_1^{(1)}\}.ee'.\cos.(cv+c'mv-\varpi-\varpi') \\
+\{(2-m-c).A_1^{(6)}+\tfrac{7}{2}.(2-2m-c).A_1^{(1)}\}.ee'.\cos.(cv-c'mv-\varpi+\varpi') \\
+(c-m).A_1^{(9)}.ee'.\cos.(2v-2mv-cv+c'mv+\varpi-\varpi') \\
+(c+m).A_1^{(8)}.ee'.\cos.(2v-2mv-cv-c'mv+\varpi+\varpi') \\
+\left\{\begin{array}{r}\frac{(4g+4+m-2c)}{4}.A_1^{(1)}-2.(1-2m).A_1^{(13)} \\ +(2-2m-2g+c).A_1^{(16)}\end{array}\right\}.e\gamma^2.\cos.(2gv-cv-2\theta+\varpi) \\
+A_0^{(15)}.e\gamma^2.\cos.(2v-2mv-2gv+cv+2\theta-\varpi) \\
+\{(1-m).A_1^{(17)}-\tfrac{1}{2}.A_0^{(18)}.e'^2+3.(1-m).\lambda_2\}.\frac{a}{a'}.\cos.(v-mv) \\
+\{(1-2m).A_1^{(19)}-\tfrac{1}{2}.(1-m).A_1^{(17)}\}.\frac{a}{a'}.e'.\cos.(v-mv+c'mv-\varpi') \\
+\{A_0^{(18)}+\tfrac{7}{2}.(1-m).A_1^{(17)}\}.\frac{a}{a'}.e'.\cos.(v-mv-c'mv+\varpi')
\end{array}\right\}.$$

L'expression de $\left(\frac{dQ}{dv}\right).\frac{du}{h^2.u^2dv}$, renferme encore la variation

$$-\frac{\bar{m}^2.a}{8a_{,}}.\{3.\sin.(v-mv)+15.\sin.(3v-3mv)\}.\frac{a}{a'}.\frac{d\delta u}{dv};$$

et il en résulte la quantité

$$\frac{9.\bar{m}^2}{4a_{,}}.(1-m).A_2^{(0)}.\frac{a}{a'}.\cos.(v-mv).$$

La fonction

$$\left\{\frac{ddu}{dv^2}+u\right\}.\frac{2}{h^2}.\int\left(\frac{dQ}{dv}\right).\frac{dv}{u^2}$$

contient d'abord le terme

$$-\left\{\frac{ddu}{dv^2}+u\right\}.\int\frac{3m'.u'^3.dv}{h^2.u^4}.\sin.(2v-2v');$$

sa variation est

$$\frac{12.m'}{h^2.a}.\left\{1+\tfrac{3}{4}\gamma^2.\cos.(2gv-2\theta)\right\}.\int\frac{u'^3.dv}{u^4}.\left\{\begin{array}{l}\frac{\delta u}{u}.\sin.(2v-2v') \\ +\frac{1}{2}.\delta v'.\cos.(2v-2v')\end{array}\right\}$$

$$-\left(\frac{dd\delta u}{dv^2}+\delta u\right).\int\frac{3m'u'^3.dv}{h^2u^4}.\sin.(2v-2v')$$

$$-\frac{9m'}{h^2.a}.\int\frac{u'^2.\delta u'}{u^4}.dv.\sin.(2v-2v').$$

Le développement de ces termes donne, en observant que c est à très-peu-près $1-\frac{3}{4}m^2$, et que g est à très-peu-près $1+\frac{3}{4}m^2$,

$$-\frac{3\bar{m}^2}{4a_{,}.(1-m)}.\left\{4.(1-m)^2-1\right\}.A_2^{(0)}.(1-\tfrac{5}{2}e'^2)$$

$$-\frac{3.\bar{m}^2}{a_{,}}.\left\{\begin{array}{l}\left\{\frac{7+(2-2m-c)^2}{4.(1-m)}\right\}.A_1^{(1)}-\left\{4.(1-m)^2-1\right\}.\left\{\frac{1+m}{2-2m-c}+\frac{1-m}{2-2m+c}\right\}.A_2^{(0)} \\ -A_1^{(6)}.e'^2+7.A_1^{(7)}.e'^2\end{array}\right\}.e.(1-\tfrac{5}{2}e'^2).\cos.(cv-\varpi)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{6m}{a_{,}}.\left\{4A_2^{(0)}+A_2^{(3)}-A_2^{(4)}-10.A_1^{(1)}.e^2+\frac{5}{2}.(A_1^{(7)}-A_1^{(6)}).e^2\right\} \\ -\frac{3.\bar{m}^2}{4a_{,}}.\left(4.\overline{1-m}^2-1\right).A_2^{(0)}.\left\{\frac{7}{2-3m}-\frac{1}{2-m}\right\} \\ -\frac{3.\bar{m}^2}{4a_{,}.(1-m)}.\left\{\left(\overline{2-m}^2-1\right).A_2^{(3)}+\left(\overline{2-3m}^2-1\right).A_2^{(4)}\right\} \\ -\frac{3.\bar{m}^2}{a_{,}}.\left\{\frac{11}{2}.C_2^{(6)}+C_2^{(9)}-C_2^{(10)}\right\}\end{array}\right\}.e'.\cos.(c'mv-\varpi')$$

$$-\frac{6.\bar{m}^2.A_1^{(8)}}{a_{,}.(2-3m-c)}.ee'.\cos.(2v-2mv-cv-c'mv+\varpi+\varpi')$$

$$-\frac{6.\bar{m}^2.A_1^{(9)}}{a_{,}.(2-m-c)}.ee'.\cos.(2v-2mv-cv+c'mv+\varpi-\varpi')$$

$$-\frac{6.\bar{m}^2}{a_{,}.(c-m)}.\left\{A_1^{(6)}+\tfrac{7}{2}A_1^{(1)}\right\}.ee'.\cos.(cv-c'mv-\varpi+\varpi')$$

$$-\frac{6.\bar{m}^2}{a_{,}.(c+m)}.\left\{A_1^{(7)}-\tfrac{1}{2}.A_1^{(1)}\right\}.ee'.\cos.(cv+c'mv-\varpi-\varpi')$$

$$+\frac{6.\bar{m}^2.A_2^{(10)}}{a_{,}.(2c-2+2m)}.e^2.\cos.(2cv-2v+2mv-2\varpi)$$

$$+\frac{6.\bar{m}^2.A_2^{(12)}}{a_{,}.(2g-2+2m)}.\gamma^2.\cos.(2gv-2v+2mv-2\theta)$$

$$+\frac{6.\overline{m}^2}{a_{\prime}}.\left\{2A_1^{(13)}-A_1^{(16)}+\frac{7m}{8}.A_1^{(1)}\right\}.e\gamma^2.\cos.(2gv-cv-2\theta+\varpi)$$

$$-\frac{6.\overline{m}^2.A_0^{(15)}}{a_{\prime}.(2-2m-2g+c)}.e\gamma^2.\cos.(2v-2mv-2gv+cv+2\theta-\varpi)$$

$$-\frac{3.\overline{m}^2}{2a_{\prime}.(1-m)}.\{(4+3m).A_1^{(17)}-2A_0^{(18)}.e'^2-\tfrac{2}{3}.[1-(1-m)^2].\lambda_2\}.\frac{a}{a'}.\cos(v-mv)$$

$$+\frac{3.\overline{m}^2}{a_{\prime}}.\{A_1^{(17)}-2A_1^{(19)}\}.\frac{a}{a'}.e'.\cos.(v-mv+c'mv-\varpi')$$

$$-\frac{6.\overline{m}^2}{a_{\prime}.(1-2m)}.\{A_0^{(18)}+\tfrac{7}{2}.A_1^{(17)}\}.\frac{a}{a'}.e'.\cos.(v-mv-c'mv+\varpi').$$

On doit observer ici que $C_2^{(6)}.\sin.(2v-2mv)$ est l'inégalité dépendante de sin. $(2v-2mv)$ dans l'expression de la longitude moyenne de la lune, en fonction de sa longitude vraie; $C_2^{(9)}.e'.\sin.(2v-2mv+c'mv-\varpi')$, et $C_2^{(10)}.e'.\sin.(2v-2mv-c'mv+\varpi')$ sont les inégalités dépendantes des angles $2v-2mv+c'mv-\varpi'$, et $2v-2mv-c'mv+\varpi'$, dans la même expression. On peut observer encore que le terme

$$\frac{6m}{a_{\prime}}.\{4A_2^{(0)}+A_2^{(3)}-A_2^{(4)}\}.e'.\cos.(c'mv-\varpi')$$

paroît être de l'ordre m^4; ce qui produiroit une quantité de l'ordre m^3, dans l'expression de la longitude moyenne de la lune; mais ce terme n'est véritablement que de l'ordre m^5; car on verra par les valeurs que nous donnerons ci-après, de $A_2^{(0)}$, $A_2^{(3)}$ et $A_2^{(4)}$; que la fonction $4A_2^{(0)}+A_2^{(3)}-A_2^{(4)}$ est de l'ordre m^3; il n'en résulte donc qu'un terme de l'ordre m^4 dans l'expression de la longitude moyenne. Nous le conservons ici, parce que nous nous sommes imposé la loi de conserver les termes de cet ordre, dans le calcul des inégalités du troisième ordre.

Il est indispensable, par cette raison, dans le développement de $-\frac{3m'u}{h^2}.\int\frac{u'^3.dv}{u^4}.\sin.(2v-2v')$, de porter la précision jusqu'aux quantités de l'ordre δu^2; il en résulte le terme

$$-\frac{30.m'u}{h^2}.\int\frac{u'^3.\delta u^2}{u^6}.dv.\sin.(2v-2v').$$

Ce terme produit le suivant,

$$\frac{15.\overline{m}^2}{2a_{,}} \cdot \frac{(A_1^{(1)})^2 . e^2 . \cos.(2cv - 2v + 2mv - 2\varpi)}{2c - 2 + 2m};$$

quoiqu'il ne soit que du cinquième ordre; cependant, comme il acquiert par l'intégration, dans l'expression de la longitude moyenne, le diviseur $2c - 2 + 2m$, il faut y avoir égard.

La fonction

$$\left(\frac{ddu}{dv^2} + u\right) \cdot \frac{2}{h^2} \cdot \int \left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{dv}{u^2}$$

donne celle-ci,

$$-\left(\frac{ddu}{dv^2} + u\right) \cdot \frac{1}{h^2} \cdot \int \frac{m'.u'^4.dv}{4u^5} \cdot \{3.\sin.(v - v') + 15.\sin.(3v - 3v')\}.$$

Sa variation produit les termes suivans,

$$-\frac{1}{a_{,}} \cdot \left\{\frac{dd\delta u}{dv^2} + \delta u\right\} \cdot \int \frac{m'.u'^4.dv}{4u^5} \cdot \{3.\sin.(v - v') + 15.\sin.(3v - 3v')\}$$

$$+\frac{5.\overline{m}^2}{4a_{,}} \cdot \frac{a}{a'} \cdot \int a\delta u . dv . \{3.\sin.(v - v') + 15.\sin.(3v - 3v')\};$$

d'où résulte le terme

$$-\frac{\overline{m}^2}{2a_{,}.(1-m)} \cdot \{13 + 8.(1-m)^2\} . A_2^{(0)} . \frac{a}{a_{,}} . \cos.(v - mv).$$

On doit faire ici une observation importante relativement aux termes dépendans de cos. $(v - mv)$, et que nous nous proposons de déterminer avec exactitude. Les expressions du rayon de l'orbite du soleil, et de sa longitude, contiennent des termes dépendans de l'angle $v - mv$, et qui résultent de l'action de la lune sur la terre : ces termes en produisent d'autres dans l'expression de u, et de la longitude moyenne de la lune, auxquels il est essentiel d'avoir égard. Pour cela, nous observerons qu'en vertu de l'action lunaire, le rayon vecteur du soleil contient, par le chapitre IV du sixième livre, le terme $\frac{\mu}{u} . \cos.(v - v')$; μ étant le rapport de la masse de la lune, à la somme des masses de la lune et de la terre; ce qui donne dans u' le terme

$$-\frac{\mu . u'^2}{u} . \cos.(v - v').$$

La longitude v' du soleil contient encore par le chapitre cité, le terme

$$\frac{\mu . u'}{u} . \sin . (v - v').$$

Cela posé, le terme $\frac{m' . u'^3}{2 h^2 u^3}$ contient le suivant,

$$- \frac{3 m' \mu . u'^4}{2 h^2 . u^4} . \cos . (v - v').$$

Le terme $\frac{3 m' . u'^3}{2 h^2 . u^3} . \cos . (2v - 2v')$ contient les deux suivans,

$$- \frac{9 m' . \mu . u'^4}{2 h^2 . u^4} . \cos . (v - v') . \cos . (2v - 2v') + \frac{6 m' . u'^4}{2 h^2 . u^4} . \sin . (v - v') . \sin . (2v - 2v');$$

ce qui donne le terme $- \frac{3 m' . \mu . u'^4}{4 h^2 . u^4} . \cos . (v - v')$. En le réunissant au précédent, on aura $- \frac{9 m' . \mu . u'^4}{4 h^2 . u^4} . \cos . (v - v')$; d'où résultent les termes suivans,

$$- \frac{9 . \bar{m}^2 . \mu}{4 a_{,}} . \frac{a}{a'} . \cos . (v - mv) - \frac{9 . \bar{m}^2 . \mu}{4 a_{,}} . \frac{a}{a'} . e' . \cos . (v - mv + c' mv - \varpi')$$
$$- \frac{27 . \bar{m}^2}{4 a_{,}} . \frac{a}{a'} . e' . \cos . (v - mv - c' mv + \varpi').$$

Le terme $- \frac{3 m'}{h^2} . \int \frac{u'^3 . dv}{u^4} . \sin . (2v - 2v')$ donne pareillement les suivans,

$$- \frac{3 . \bar{m}^2 . \mu}{2 . (1 - m)} . \frac{a}{a_{,}} . \frac{a}{a'} . \cos . (v - mv) - \frac{3 . \bar{m}^2 . \mu}{2} . \frac{a}{a_{,}} . \frac{a}{a'} . e' . \cos . (v - mv + c' mv - \varpi')$$
$$- \frac{9 . \bar{m}^2 . \mu}{2 . (1 - 2m)} . \frac{a}{a_{,}} . \frac{a}{a'} . e' . \cos . (v - mv - c' mv + \varpi')$$

Il nous reste à considérer la partie du développement de $- \frac{1}{h^2 . (1 + s^2)^{\frac{3}{2}}}$, qui dépend du carré de la force perturbatrice. Ce développement renferme la fonction $\frac{3}{2 a_{,}} . (\delta s)^2$, ce qui produit les termes suivans,

$\frac{3}{4 a_{,}}$

$$\frac{3}{4a_{,}}\cdot(B_{,}^{(0)})^2\cdot\gamma^2$$

$$+\frac{3}{2a_{,}}\cdot\left\{B_{1}^{(9)}+B_{1}^{(10)}\right\}.B_{1}^{(0)}.\gamma^2 e'.\cos.(c'mv-\varpi')$$

$$+\frac{3}{2a_{,}}.B_{1}^{(0)}.B_{2}^{(5)}\cdot e\gamma^2.\cos.(2gv-cv-2\theta+\varpi).$$

9. Rassemblons maintenant les divers termes que nous venons de développer. La seconde des équations (L) du n°. 1 deviendra ainsi,

$$0=\frac{ddu}{dv^2}+u-\frac{1}{a_{,}}.\left\{1+e^2+\frac{\gamma^2}{4}+\mathfrak{C}''\right\}+\frac{\overline{m}^2}{2a_{,}}.\left\{1+e^2+\frac{\gamma^2}{4}+\tfrac{5}{2}.e'^2\right\}; \qquad (L')$$

$$-\frac{3.\overline{m}^2}{4a_{,}}\cdot(4-3m-m^2).A_{2}^{(0)}.(1-\tfrac{5}{2}e'^2)+\frac{3}{4a_{,}}.(B_{1}^{(0)})^2.\gamma^2$$

$$-\frac{3.\overline{m}^2}{4a_{,}}.\left\{\begin{array}{l}2+e^2+3e'^2-2.(B_{2}^{(2)}+B_{2}^{(3)}).\dfrac{\gamma^2}{\overline{m}^2}+(1+2m-c).A_{2}^{(2)}.(1-\tfrac{5}{2}e'^2)\\ -4.\left\{1+2m+(4.\overline{1-m}^2-1).\left(\dfrac{1+m}{2-2m-c}+\dfrac{1-m}{2-2m+c}\right)\right\}.A_{2}^{(0)}.(1-\tfrac{5}{2}e'^2)\\ +\dfrac{\{(1+6m+c).(1-m)+7+(2-2m-c)^2\}}{1-m}.A_{1}^{(1)}.(1-\tfrac{5}{2}e'^2)\\ -\tfrac{1}{2}.(9+m+c).A_{1}^{(6)}.e'^2+\tfrac{7}{2}.(9+3m+c).A_{1}^{(7)}.e'^2\\ +3.(A_{1}^{(8)}+A_{1}^{(9)}).e'^2\end{array}\right\}.e.\cos.(cv-\varpi)$$

$$+\frac{3.\overline{m}^2}{2a_{,}}.\left\{\begin{array}{l}1+(1+2m).e^2+\dfrac{\gamma^2}{4}-\tfrac{5}{2}e'^2\\ \dfrac{+\left(1+3e^2+\dfrac{\gamma^2}{4}-\tfrac{5}{2}e'^2\right)}{1-m}\\ -A_{2}^{(0)}-(B_{1}^{(0)}-B_{2}^{(1)}).\dfrac{\gamma^2}{\overline{m}^2}\end{array}\right\}.\cos.(2v-2mv)$$

$$+\frac{3.\overline{m}^2}{a_{,}}.\left\{\begin{array}{l}\dfrac{c}{4}.\left\{1+\dfrac{e^2}{4}.(2-19.m)-\tfrac{5}{2}e'^2\right\}\\ -\dfrac{(3+4m)}{4}.(1+\tfrac{1}{2}e^2-\tfrac{5}{2}e'^2)+\dfrac{1-c^2}{4.(1-m)}\\ -\dfrac{2.(1+m)}{2-2m-c}.(1+\tfrac{7}{4}e^2-\tfrac{5}{2}e'^2)\\ -\tfrac{1}{2}.(A_{1}^{(1)}-2A_{2}^{(0)})+\tfrac{1}{2}.(B_{2}^{(5)}-B_{2}^{(6)}).\dfrac{\gamma^2}{\overline{m}^2}\end{array}\right\}.e.\cos.(2v-2mv-cv+\varpi)$$

$$-\frac{3.\bar{m}^2}{4a_,}.\left\{3+c-4m+\frac{8.(1-m)}{2-2m+c}+2.A_2^{(2)}\right\}.e.\cos.(2v-2mv+cv-\varpi)$$

$$-\frac{3.\bar{m}^2}{4a_,}.\left\{\frac{4-m}{2-m}+2B_1^{(9)}.\frac{\gamma^2}{\bar{m}^2}+2.A_2^{(3)}\right\}.e'.\cos.(2v-2mv+c'mv-\varpi')$$

$$+\frac{3.\bar{m}^2}{4a_,}\left\{.\frac{7.(4-3m)}{2-3m}-2B_1^{(10)}.\frac{\gamma^2}{\bar{m}^2}-2A_2^{(4)}\right\}.e'.\cos.(2v-2mv-c'mv+\varpi')$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{3.\bar{m}^2}{2a_,}.\left\{\begin{array}{l}1+e^2+\frac{\gamma^2}{4}+\frac{9}{8}.e'^2+(B_1^{(7)}+B_1^{(8)}).\frac{\gamma^2}{\bar{m}^2}-\frac{3}{2}.(1+2m).A_2^{(0)}\\ -\frac{2.(1-2m).(3-2m).(3-m)}{(2-3m).(2-m)}.A_2^{(0)}-2.A_2^{(3)}-(2-3m).A_2^{(4)}\\ +(B_1^{(9)}+B_1^{(10)}).B_1^{(0)}.\frac{\gamma^2}{\bar{m}^2}-A_2^{(5)}-11.C_2^{(6)}-2C_2^{(9)}+2C_2^{(10)}\end{array}\right\}\\ +\frac{6m}{a_,}.\left\{4A_2^{(0)}+A_2^{(3)}-A_2^{(4)}-10.A_1^{(1)}.e^2+\frac{5}{2}.(A_1^{(7)}-A_1^{(6)}).e^2\right\}\end{array}\right\}.e'.\cos.(c'mv-\varpi')$$

$$+\frac{3.\bar{m}^2}{2a_,}.\left\{\begin{array}{l}\frac{3+2m-c}{4}+\frac{(2+m)}{2-m-c}-\frac{3}{2}.A_1^{(1)}-A_1^{(6)}\\ -\left\{\frac{3+m-c}{2}+\frac{4}{2-m-c}\right\}.A_1^{(9)}\end{array}\right\}.ee'.\cos.(2v-2mv-cv+c'mv+\varpi-\varpi')$$

$$-\frac{3.\bar{m}^2}{2a_,}\left\{\begin{array}{l}\frac{7.(3+6m-c)}{4}+\frac{7.(2+3m)}{2-3m-c}+\frac{3}{2}A_,^{(1)}\\ +A_,^{(7)}+\left\{\frac{3-m-c}{2}+\frac{4}{2-3m-c}\right\}.A_,^{(8)}\end{array}\right\}.ee'.\cos.(2v-2mv-cv-c'mv+\varpi+\varpi')$$

$$-\frac{3.\bar{m}^2}{2a_,}.\left\{\begin{array}{l}\frac{3+2m}{2}-\left\{\frac{1+2m+c}{4}+\frac{2}{c+m}\right\}.A_,^{(1)}\\ +A_,^{(8)}+\left\{\frac{1+3m+c}{2}+\frac{4}{c+m}\right\}.A_,^{(7)}\end{array}\right\}.ee'.\cos.(cv+c'mv-\varpi-\varpi')$$

$$-\frac{3.\bar{m}^2}{2a_,}.\left\{\begin{array}{l}\frac{3-2m}{2}+A_,^{(9)}+7.\left\{\frac{1+2m+c}{4}+\frac{2}{c-m}\right\}.A_,^{(1)}\\ +\left\{\frac{1+m+c}{2}+\frac{4}{c-m}\right\}.A_,^{(6)}\end{array}\right\}.ee'.\cos.(cv-c'mv-\varpi+\varpi')$$

$$+\frac{3.\bar{m}^2}{2a_,}.\left\{1-B_0^{(11)}.\frac{\gamma^2}{\bar{m}^2}-A_2^{(10)}\right\}.e^2.\cos.(2cv-2\varpi)$$

$$+\frac{3.\bar{m}^2}{4a_,}\left\{\begin{array}{l}\frac{2+11.m+8m^2}{2}-\frac{(10+19m+8m^2)}{2c-2+2m}\\ +4A_,^{(1)}+\frac{\{8.A_2^{(10)}+10.(A_,^{(1)})^2\}}{2c-2+2m}-2A_,^{(11)}\end{array}\right\}.e^2.\cos.(2cv-2v+2mv-2\varpi)$$

$$-\frac{3}{4a_{,}}\cdot\left\{1+e^2-\frac{\gamma^2}{4}-\tfrac{1}{2}\cdot\bar{m}^2+2\bar{m}^2\cdot A_2^{(12)}\right\}\cdot\gamma^2\cdot\cos.(2gv-2\theta)$$

$$+\frac{3\cdot\bar{m}^2}{4a_{,}}\cdot\left\{\begin{matrix}\frac{+2m-2g}{4}+\frac{(4g^2-1)}{4\cdot(1-m)}-\frac{(2+m)}{2g-2+2m}\\ +\frac{2B_1^{(0)}}{\bar{m}^2}-2A_1^{(13)}+\frac{8\cdot A_2^{(12)}}{2g-2+2m}\end{matrix}\right\}\cdot\gamma^2\cdot\cos.(2gv-2v+2mv-2\theta)$$

$$+\frac{3\cdot\bar{m}^2}{2a_{,}}\cdot\left\{\tfrac{1}{2}-A_2^{(14)}\right\}\cdot e'^2\cdot\cos.(2c'mv-2\varpi')$$

$$-\frac{3\cdot\bar{m}^2}{2a_{,}}\cdot\left\{\begin{matrix}\tfrac{1}{2}+\frac{B_2^{(3)}}{\bar{m}^2}+\frac{(1+c-2g-10.m)}{4}\cdot A_{,}^{(1)}-(10+5m)\cdot A_1^{(13)}\\ +(5+m)\cdot A_1^{(16)}-\frac{B_1^{(0)}.B_2^{(5)}}{\bar{m}^2}+A_0^{(15)}\end{matrix}\right\}\cdot e\gamma^2\cdot\cos.(2gv-cv-2\theta+\varpi)$$

$$-\frac{3\cdot\bar{m}^2}{4a_{,}}\cdot\left\{\begin{matrix}1+2m+\frac{(5+m)}{1-2m}-\frac{3\cdot(1-m)}{3-2m}+2A_1^{(16)}\\ -\frac{2B_2^{(4)}}{\bar{m}^2}+\frac{10\cdot A_0^{(15)}}{1-2m}\end{matrix}\right\}\cdot e\gamma^2\cdot\cos.(2v-2mv-2gv+cv+2\theta-\varpi)$$

$$+\frac{\bar{m}^2}{a_{,}}\cdot\left\{\begin{matrix}\tfrac{9}{8}\cdot(1-2\mu)\cdot(1+2e^2+2e'^2)+\frac{3\cdot(1-2\mu)\cdot(1+\frac{9}{2}e^2+2e'^2)}{4\cdot(1-m)}\\ -\frac{(36+21\cdot m-15\cdot m^2)}{4\cdot(1-m)}\cdot A_1^{(17)}+\frac{3\cdot(1+m)}{2\cdot(1-m)}\cdot A_0^{(18)}\cdot e'^2\\ -\frac{(57-38\cdot m)}{4\cdot(1-m)}\cdot A_2^{(0)}+\tfrac{3}{2}\cdot(B_2^{(14)}+B_2^{(15)})\cdot\frac{\gamma^2}{\bar{m}^2}\end{matrix}\right\}\cdot\frac{a}{a_{,}}\cdot\cos.(v-mv)$$

$$+\frac{3\cdot\bar{m}^2}{2a_{,}}\cdot\left\{\begin{matrix}\frac{5\cdot(1-2\mu)}{4}-A_0^{(18)}+\frac{(4+m)}{4}\cdot A_1^{(17)}\\ -(5+m)\cdot A_1^{(19)}\end{matrix}\right\}\cdot\frac{a}{a_{,}}\cdot e'\cdot\cos.(v-mv+c'mv-\varpi')$$

$$+\frac{3\cdot\bar{m}^2}{2a_{,}\cdot(1-2m)}\cdot\left\{\begin{matrix}\frac{(15-18\cdot m)}{4}\cdot(1-2\mu)-\frac{(76-33\cdot m)}{4}\cdot A_1^{(17)}\\ -5\cdot A_0^{(18)}-(1-2m)\cdot A_1^{(19)}\end{matrix}\right\}\cdot\frac{a}{a_{,}}\cdot e'\cdot\cos.(v-mv-c'mv+\varpi')\cdot$$

Je n'ai point eu égard aux termes multipliés par λ_2, parce qu'ils se détruisent réciproquement aux quantités près de l'ordre m^7.

10. Pour intégrer cette équation différentielle, nous observerons qu'elle donne, en n'ayant égard qu'aux parties non périodiques,

$$u = \frac{1}{a_{,}} \cdot \left\{1 + e^2 + \frac{\gamma^2}{4} + \epsilon''\right\} - \frac{\overline{m}^2}{2a_{,}} \cdot \left(1 + e^2 + \frac{\gamma^2}{4} + \tfrac{3}{2} e'^2\right)$$
$$+ \frac{3 \cdot \overline{m}^2}{4a_{,}} \cdot \{4 - 3m - m^2\} \cdot A_2^{(0)} \cdot (1 - \tfrac{3}{2} e'^2) - \frac{3}{4a_{,}} \cdot (B_1^{(0)})^2 \cdot \gamma^2.$$

Nous avons désigné dans le n°. 6, cette quantité par $\frac{1}{a} \cdot \left(1 + e^2 + \frac{\gamma^2}{4} + \epsilon\right)$; on aura donc en observant que sans l'action du soleil, on auroit $\frac{1}{a} = \frac{1}{a_{,}}$, et qu'ainsi l'on peut supposer $\epsilon = \epsilon''$;

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a_{,}} - \frac{\overline{m}^2}{2a_{,}} \cdot \{1 + \tfrac{3}{2} e'^2\} + \frac{3 \cdot \overline{m}^2}{4a_{,}} \cdot (4 - 3m - m^2) \cdot A_2^{(0)} \cdot (1 - \tfrac{3}{2} e'^2)$$
$$- \frac{3}{4a_{,}} \cdot (B_1^{(0)})^2 \cdot \gamma^2.$$

L'action des planètes fait varier l'excentricité e' de l'orbe terrestre, sans altérer son demi-grand axe a', comme on l'a vu dans le second livre ; la valeur de $\frac{1}{a}$ subit donc des variations correspondantes, à raison du terme $-\frac{3 \cdot \overline{m}^2 e'^2}{4a_{,}}$ qu'elle contient ; et comme la constante de la parallaxe de la lune est proportionnelle à $\frac{1}{a}$, on voit qu'elle doit éprouver une variation séculaire ; mais on voit en même temps que cette variation sera toujours insensible.

Nous avons représenté précédemment par $\frac{e}{a} \cdot (1 + e^2) \cdot \cos.(cv - \varpi)$, la partie de u dépendante de $\cos.(cv - \varpi)$. En la substituant dans l'équation différentielle précédente ; en comparant ensuite les sinus et cosinus de $cv - \varpi$, et négligeant les quantités de l'ordre $\frac{d^2 \cdot \frac{e}{a}}{dv^2}$, ce qui est permis, vu la lenteur des variations séculaires de l'excentricité de l'orbe terrestre ; on aura les deux équations,

$$0 = \frac{e \cdot (1 + e^2)}{a} \cdot \frac{dd\varpi}{dv^2} - 2 \cdot \left(c - \frac{d\varpi}{dv}\right) \cdot \frac{d \cdot e \cdot \frac{(1 + e^2)}{a}}{dv};$$
$$0 = 1 - \left(c - \frac{d\varpi}{dv}\right)^2 - p - q \cdot e'^2;$$

la quantité $-p-q.e'^2$ étant supposée égale au coëfficient de $e.\cos.(cv-\varpi)$, dans l'équation différentielle (L') du n°. précédent, divisé par $\frac{1+e^2}{a}$; où l'on doit observer que les valeurs de $A_2^{(0)}$, $A_1^{(1)}$, $B_2^{(2)}$ et $B_2^{(3)}$ renferment déjà le facteur $1-\frac{1}{2}e'^2$. La première de ces équations donne en l'intégrant,

$$\frac{1}{c-\frac{d\varpi}{dv}}=\frac{k.e^2.(1+e^2)^2}{a^2};$$

k étant une constante arbitraire. La seconde donne, en négligeant le carré de qe'^2,

$$\frac{d\varpi}{dv}=c-\sqrt{1-p}+\frac{\frac{1}{2}.qe'^2}{\sqrt{1-p}};$$

et par conséquent, si l'on regarde p et q comme constans, ce que l'on peut faire ici sans erreur sensible; on aura, en désignant $\frac{q}{\sqrt{1-p}}$ par q',

$$\varpi=cv-v.\sqrt{1-p}+\tfrac{1}{2}q'.\int e'^2dv+\varepsilon;$$

ε étant une arbitraire; ce qui donne

$$\cos.(cv-\varpi)=\cos.\left\{v.\sqrt{1-p}-\frac{q'}{2}.\int e'^2dv-\varepsilon\right\}.$$

Il suit de-là, que conformément aux observations, le périgée lunaire a un mouvement égal à $(1-\sqrt{1-p}).v+\frac{1}{2}q'.\int e'^2dv$.

Ce mouvement n'est pas uniforme, à raison de la variabilité de e'; et si l'on suppose qu'à partir d'une époque donnée, on représente e' par $E'+fv+lv^2$, E' étant l'excentricité de l'orbe terrestre à la même époque, le mouvement du périgée sera

$$(1-\sqrt{1-p}+\tfrac{1}{2}q'.E'^2).v+\tfrac{1}{2}q'.E'.fv^2+\tfrac{1}{6}q'.(2E'l+f^2).v^3.$$

Cette expression pourra servir pendant deux mille ans, soit avant, soit après l'époque. La partie

$$\tfrac{1}{2}.q'.E'.fv^2+\tfrac{1}{6}.q'.(2E'l+f^2).v^3$$

forme l'équation séculaire du mouvement du périgée, qui maintenant se rallentit de siècle en siècle. La valeur de la constante c peut être supposée égale à $\sqrt{1-p}-\frac{1}{2}q'.E'^2$; l'angle ϖ est alors

égal à la constante ε, plus à l'équation séculaire du mouvement du périgée.

L'excentricité e, de l'orbe lunaire, est assujétie à une variation séculaire analogue à celle de la parallaxe, mais insensible comme elle; ces variations étant proportionnelles à $\frac{d\varpi}{dv}$, qui ne devient sensible que dans l'intégrale $\int \frac{d\varpi}{dv}.dv$.

Si l'on représente par $\frac{H}{a_{,}}.\cos.(iv+\epsilon)$, un terme quelconque de l'équation (L'), et que l'on désigne par

$$P.\cos.(iv+\epsilon)+Q.\sin.(iv+\epsilon)$$

la partie correspondante de u; on aura, pour déterminer P et Q, les deux équations

$$0=\left\{1-\left(i+\frac{d\epsilon}{dv}\right)^2\right\}.P+\frac{H}{a_{,}};$$

$$Q=\frac{2.\left(i+\frac{d\epsilon}{dv}\right).\frac{dP}{dv}+P.\frac{dd\epsilon}{dv^2}}{1-\left(i+\frac{d\epsilon}{dv}\right)^2}.$$

Les variations de ϵ et de P étant extrêmement lentes, et i étant très-grand relativement à $\frac{d\epsilon}{dv}$, la valeur de Q est insensible, et l'on a

$$P=\frac{H}{a_{,}.\left\{\left(i+\frac{d\epsilon}{dv}\right)^2-1\right\}};$$

où l'on doit observer que $i+\frac{d\epsilon}{dv}$ étant le coëfficient de dv, dans la différentielle de l'angle $iv+\epsilon$, on peut supposer ϵ constant dans cet angle, pourvu que l'on prenne pour i le coëfficient de v correspondant à l'époque pour laquelle on calcule. On déterminera ainsi les coëfficiens $A_2^{(0)}$, $A_1^{(1)}$, &c. de l'expression de $a.\delta u$.

Relativement aux termes dans lesquels le coëfficient de v ne diffère de l'unité que d'une quantité du second ordre, et qui dépendent des angles $2gv-cv-2\theta+\varpi$, et $v-mv+c'mv-\varpi'$; la considération des termes dépendans du cube de la force pertur-

batrice, devient nécessaire; mais en portant, comme nous l'avons fait, l'approximation jusqu'aux quantités du quatrième ordre inclusivement, les termes dépendans du cube de la force perturbatrice, qui peuvent devenir sensibles, se trouvent compris dans les résultats précédens. Cela posé,

Si l'on substitue dans l'équation (L'), au lieu de u, la fonction

$$\frac{1}{a}.\left\{\begin{array}{l}1+e^2+\frac{\gamma^2}{4}+\epsilon+e.(1+e^2).\cos.(cv-\varpi)\\ -\frac{1}{4}\gamma^2.\left(1+e^2-\frac{\gamma^2}{4}\right).\cos.(2gv-2\theta)\end{array}\right\}+\delta u\,;$$

la comparaison des divers cosinus, donnera les équations suivantes,

$$0=\{1-4.(1-m)^2\}.A_2^{(0)}+\tfrac{3}{2}.\overline{m}^2.\frac{a}{a_{\prime}}.\left\{\begin{array}{l}1+(1+2m).e^2+\frac{\gamma^2}{4}-\frac{5}{2}.e'^2\\ +\frac{\left(1+3e^2+\frac{\gamma^2}{4}-\frac{5}{2}.e'^2\right)}{1-m}\\ -A_2^{(0)}-\{B_1^{(0)}-B_2^{(1)}\}.\frac{\gamma^2}{\overline{m}^2}\end{array}\right\}$$

$$0=\{1-(2-2m-c)^2\}.A_1^{(1)}+3.\overline{m}^2.\frac{a}{a_{\prime}}.\left\{\begin{array}{l}\frac{c}{4}.\left\{1+\frac{(2-19m)}{4}.e^2-\frac{5}{2}.e'^2\right\}\\ -\frac{(3+4m)}{4}.(1+\frac{1}{2}e^2-\frac{5}{2}.e'^2)+\frac{1-c^2}{4.(1-m)}\\ -\frac{2.(1+m)}{2-2m-c}.\{1+\frac{7}{4}e^2-\frac{5}{2}e'^2\}\\ -\frac{1}{2}.\{A_1^{(1)}-2A_2^{(0)}\}+\frac{1}{2}.\{B_2^{(5)}-B_2^{(6)}\}\;\frac{\gamma^2}{\overline{m}^2}\end{array}\right\}$$

$$0=\{1-(2-2m+c)^2\}.A_2^{(2)}-\tfrac{3}{4}.\overline{m}^2.\frac{a}{a_{\prime}}.\left\{3+c-4m+\frac{8.(1-m)}{2-2m+c}+2A_2^{(2)}\right\}$$

$$0=\{1-(2-m)^2\}.A_2^{(3)}-\tfrac{1}{4}.\overline{m}^2.\frac{a}{a_{\prime}}.\left\{\frac{4-m}{2-m}+2B_1^{(9)}.\frac{\gamma^2}{\overline{m}^2}+2A_2^{(3)}\right\}$$

$$0=\{1-(2-3m)^2\}.A_2^{(4)}+\tfrac{3}{4}.\overline{m}^2.\frac{a}{a_{\prime}}.\left\{\frac{7.(4-3m)}{2-3m}-2B_1^{(10)}.\frac{\gamma^2}{\overline{m}^2}-2\,A_2^{(4)}\right\}$$

$$0=(1-m^2).A_2^{(5)}+\frac{3.\bar{m}^2}{2}.\frac{a}{a_,}.\left\{\begin{array}{l}1+e^2+\frac{\gamma^2}{4}+\frac{9}{8}.e'^2+\{B_1^{(7)}+B_1^{(8)}\}.\frac{\gamma^2}{\bar{m}^2}-\frac{3}{2}.(1+2m).A_2^{(0)} \\ -\frac{2.(1-2m).(3-2m).(3-m)}{(2-3m).(2-m)}.A_2^{(0)}-2A_2^{(3)}-(2-3m).A_2^{(4)} \\ +\{B_1^{(9)}+B_1^{(10)}\}.B_1^{(0)}.\frac{\gamma^2}{\bar{m}^2}-A_2^{(5)}-11.C_2^{(6)}-2C_2^{(9)}+2C_2^{(10)}\end{array}\right\}$$

$$+6m.\{4A_2^{(0)}+A_2^{(3)}-A_2^{(4)}-10.A_1^{(1)}.e^2+\tfrac{5}{2}.(A_1^{(7)}-A_1^{(6)}).e^2\}$$

$$0=\{1-(2-m-c)^2\}.A_1^{(6)}+\frac{3}{2}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_,}.\left\{\begin{array}{l}\frac{3+2m-c}{4}+\frac{2+m}{2-m-c}-\frac{3}{4}.A_1^{(1)}-A_1^{(6)} \\ -\left\{\frac{3+m-c}{2}+\frac{4}{2-m-c}\right\}.A_1^{(9)}\end{array}\right\}$$

$$0=\{1-(2-3m-c)^2\}.A_1^{(7)}-\frac{3}{2}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_,}.\left\{\begin{array}{l}\frac{7.(3+6m-c)}{4}+\frac{7.(2+3m)}{2-3m-c}+\frac{3}{2}.A_1^{(1)} \\ +A_1^{(7)}+\left\{\frac{3-m-c}{2}+\frac{4}{2-3m-c}\right\}.A_1^{(8)}\end{array}\right\}$$

$$0=\{1-(c+m)^2\}.A_1^{(8)}-\frac{3}{2}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_,}.\left\{\begin{array}{l}\frac{3+2m}{2}-\left\{\frac{1+2m+c}{4}+\frac{2}{c+m}\right\}.A_1^{(1)} \\ +A_1^{(8)}+\left\{\frac{1+m+c}{2}+\frac{4}{c+m}\right\}.A_1^{(7)}\end{array}\right\}$$

$$0=\{1-(c-m)^2\}.A_1^{(9)}-\frac{3}{2}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_,}.\left\{\begin{array}{l}\frac{3-2m}{2}+A_1^{(9)}+7.\left\{\frac{1+2m+c}{4}+\frac{2}{c-m}\right\}.A_1^{(1)} \\ +\left\{\frac{1+m+c}{2}+\frac{4}{c-m}\right\}.A_1^{(6)}\end{array}\right\}$$

$$0=(1-4c^2).A_2^{(10)}+\frac{3}{2}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_,}.\left\{1-B_0^{(11)}.\frac{\gamma^2}{\bar{m}^2}-A_2^{(10)}\right\}$$

$$0=\{1-(2c-2+2m)^2\}.A_1^{(11)}+\frac{3}{4}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_,}.\left\{\begin{array}{l}\frac{2+11.m+8.m^2}{2}-\frac{(10+19.m+8.m^2)}{2c-2+2m} \\ +4A_1^{(1)}+\frac{\{8.A_2^{(10)}+10.(A_1^{(1)})^2\}}{2c-2+2m}-2A_1^{(11)}\end{array}\right\}$$

$$0=\{1-4g^2\}.A_2^{(12)}+\frac{a}{a_,}.\left\{g^2-1-\frac{3}{4}.\left(\frac{a-a_,}{a}\right)+\frac{1}{8}.\bar{m}^2-\frac{3}{2}.\bar{m}^2.A_2^{(12)}\right\}$$

$$0=\{1-(2g-2+2m)^2\}.A_1^{(13)}+\frac{3}{4}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_,}.\left\{\begin{array}{l}\frac{3+2m-2g}{4}+\frac{(4g^2-1)}{4.(1-m)}-\frac{(2+m)}{2g-2+2m} \\ +\frac{2B_1^{(0)}}{\bar{m}^2}-2A_1^{(13)}+\frac{8.A_2^{(12)}}{2g-2+2m}\end{array}\right\}$$

$0=$

$$0=(1-4m^2).A_2^{(14)}+\tfrac{3}{2}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\{\tfrac{3}{2}-A_2^{(14)}\}$$

$$0=\{1-(2g-c)^2\}.A_0^{(15)}-\tfrac{3}{2}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\left\{\begin{array}{l}\tfrac{1}{2}+\dfrac{B_2^{(3)}}{\bar{m}^2}+\dfrac{(1+c-2g-10.m)}{4}.A_1^{(1)}-(10+5m).A_1^{(13)}\\+(5+m).A_1^{(16)}-\dfrac{B_1^{(0)}.B_2^{(5)}}{\bar{m}^2}+A_0^{(15)}\end{array}\right\}$$

$$0=\{1-(2-2m-2g+c)^2\}.A_1^{(16)}-\tfrac{3}{4}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\left\{\begin{array}{l}1+2m+\dfrac{(5+m)}{1-2m}+\dfrac{3.(1-m)}{3-2m}\\+2A_1^{(16)}-\dfrac{2B_2^{(4)}}{\bar{m}^2}+\dfrac{10.A_0^{(15)}}{1-2m}\end{array}\right\}$$

$$0=\{1-(1-m)^2\}.A_1^{(17)}+\bar{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\left\{\begin{array}{l}\tfrac{9}{8}.(1-2\mu).(1+2e^2+2e'^2)+\dfrac{3.(1-2\mu)}{4.(1-m)}.(1+\tfrac{9}{2}e^2+2e'^2)\\-\dfrac{(36+21.m-15.m^2)}{4.(1-m)}.A_1^{(17)}+\dfrac{3.(1+m)}{2.(1-m)}.A_0^{(18)}.e'^2\\-\dfrac{(57-38.m)}{4.(1-m)}.A_2^{(0)}+\tfrac{3}{2}.\{B_2^{(14)}+B_2^{(15)}\}.\dfrac{\gamma^2}{\bar{m}^2}\end{array}\right\}$$

$$0=\frac{5.(1-2\mu)}{4}-A_0^{(18)}+\frac{(4+m)}{4}.A_1^{(17)}-(5+m).A_1^{(19)}$$

$$0=\{1-(1-2m)^2\}:A_1^{(19)}+\frac{3\bar{m}^2}{2.(1-2m)}.\frac{a}{a_{,}}.\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(15-18.m)}{4}.(1-2\mu)-\dfrac{(76-33.m)}{4}.A_1^{(17)}\\-5.A_0^{(18)}-(1-2m).A_1^{(19)}\end{array}\right\}.$$

11. Considérons présentement la troisième des équations (L) du n°. 1. La fonction

$$-\frac{s}{h^2u}.\left(\frac{dQ}{du}\right)-\frac{(1+ss)}{h^2.u^2}.\left(\frac{dQ}{ds}\right)$$

devient

$$\frac{3m'.u'^3.s}{2h^2.u^4}+\frac{3m'.u'^3.s}{2h^2.u^4}.\cos.(2v-2v')+\frac{3m'.u'^4.s}{8h^2.u^5}.\left\{\begin{array}{l}11.\cos.(v-v')\\+5.\cos.(3v-3v')\end{array}\right\};$$

développons ses différens termes. Le terme $\frac{3m'.u'^3.s}{2h^2.u^4}$ donne par son développement, la fonction

$$\tfrac{3}{2}.\overline{m}^2.\frac{a}{a_{\prime}}.\gamma.\left\{\begin{array}{l}(1+2e^2-\tfrac{1}{2}\gamma^2+\tfrac{3}{2}.e'^2).\sin.(gv-\theta)\\ -2e.\sin.(gv+cv-\theta-\varpi)\\ -2e.\sin.(gv-cv-\theta+\varpi)\\ +\tfrac{3}{2}e'.\sin.(gv+c'mv-\theta-\varpi')\\ +\tfrac{3}{2}e'.\sin.(gv-c'mv-\theta+\varpi')\\ -\tfrac{5}{2}e^2.\sin.(2cv-gv-2\varpi+\theta)\end{array}\right\}.$$

Le développement de $\frac{3m'.u'^3.s}{2h^2.u^4}.\cos.(2v-2v')$, se réduit à multiplier le développement de $\frac{3m'u'^3}{2h^2.u^3}.\cos.(2v-2v')$, que nous avons donné dans le n°. 6, par $\frac{s}{u}$; et l'on aura

$$\tfrac{3}{4}.\overline{m}^2.\frac{a}{a_{\prime}}.\gamma.\left\{\begin{array}{l}-\left\{1+2e^2-\frac{(2+m)}{4}.\gamma^2-\tfrac{5}{2}.e'^2\right\}.\sin.(2v-2mv-gv+\theta)\\ +\sin.(2v-2mv+gv-\theta)\\ -2.(1+m).e.\sin.(2v-2mv+gv-cv-\theta+\varpi)\\ -2.(1+m).e.\sin.(gv+cv-2v+2mv-\theta-\varpi)\\ +2.(1-m).e.\sin.(2v-2mv-gv+cv+\theta-\varpi)\\ -2.(1-m).e.\sin.(gv+cv+2v-2mv-\theta-\varpi)\\ -\tfrac{7}{2}e'.\sin.(2v-2mv-gv-c'mv+\theta+\varpi')\\ +\tfrac{7}{2}e'.\sin.(2v-2mv+gv-c'mv-\theta+\varpi')\\ +\tfrac{1}{2}e'.\sin.(2v-2mv-gv+c'mv+\theta-\varpi')\\ -\tfrac{1}{2}e'.\sin.(2v-2mv+gv+c'mv-\theta-\varpi')\\ +\frac{(10+19.m+8.m^2)}{4}.e^2.\left\{\begin{array}{l}\sin.(2v-2mv-2cv+gv+2\varpi-\theta)\\ +\sin.(2cv+gv-2v+2mv-2\varpi-\theta)\end{array}\right\}\end{array}\right\}.$$

Le terme $\frac{33.m'.u'^4.s}{8h^2.u^5}.\cos.(v-v')$ produit les suivans,

$$\frac{33.\overline{m}^2}{16}.\frac{a}{a_{\prime}}.\frac{a}{a'}.\gamma.\{\sin.(gv-v+mv-\theta)+\sin.(gv+v-mv-\theta)\}.$$

Le terme dépendant de $\cos.(3v-3v')$ est insensible; nous n'avons même eu égard aux deux précédens, qu'à raison de leur petite influence sur l'argument de la longitude lunaire, dépendant de $v-mv$.

La fonction $\frac{1}{h^2.u^2}.\frac{ds}{dv}.\left(\frac{dQ}{dv}\right)$, que renferme la troisième des équations (L), donne le terme suivant,

$$-\frac{3m'.u'^3}{2h^2.u^4}.g\gamma.\cos.(gv-\theta).\sin.(2v-2v').$$

On aura le développement de ce terme, en augmentant dans le développement de $\frac{3m'.u'^3.s}{2h^2.u^4}.\cos.(2v-2v')$, les angles gv et $2v$, d'un angle droit, et en le multipliant par g, ce qui donne

$$-\frac{3.\bar{m}^2}{4}.\frac{a}{a_{,}}.g\gamma.\left\{\begin{array}{l}\left\{1+2e^2-(2+m).\frac{\gamma^2}{4}-\frac{5}{2}.e'^2\right\}.\sin.(2v-2mv-gv+\theta)\\ +\sin.(2v-2mv+gv-\theta)\\ -2.(1+m).e.\sin.(2v-2mv+gv-cv-\theta+\varpi)\\ +2.(1+m).e.\sin.(gv+cv-2v+2mv-\theta-\varpi)\\ -2.(1-m).e.\sin.(2v-2mv-gv+cv+\theta-\varpi)\\ -2.(1-m).e.\sin.(gv+cv+2v-2mv-\theta-\varpi)\\ +\frac{7}{2}.e'.\sin.(2v-2mv-gv-c'mv+\theta+\varpi')\\ +\frac{7}{2}.e'.\sin.(2v-2mv+gv-c'mv-\theta+\varpi')\\ -\frac{1}{2}e'.\sin.(2v-2mv-gv+c'mv+\theta-\varpi')\\ -\frac{1}{2}e'.\sin.(2v-2mv+gv+c'mv-\theta-\varpi')\\ +\frac{(10+19.m+8.m^2)}{4}.e^2.\left\{\begin{array}{l}\sin.(2v-2mv-2cv+gv+2\varpi-\theta)\\ -\sin.(2cv+gv-2v+2mv-2\theta-\varpi)\end{array}\right.\end{array}\right\}.$$

Les termes de la fonction $\frac{1}{h^2.u^2}.\frac{ds}{dv}.\left(\frac{dQ}{dv}\right)$, qui dépendent de u'^4, produisent les suivans,

$$\frac{3.\bar{m}^2}{16}.\frac{a}{a_{,}}.\frac{a}{a'}.\gamma.\{\sin.(gv-v+mv-\theta)-\sin.(gv+v-mv-\theta)\}.$$

Le produit $\left(\frac{dds}{dv^2}+s\right).\frac{2}{h^2}.\int\left(\frac{dQ}{dv}\right).\frac{dv}{u^2}$, que renferme la troisième des équations (L) du n°. 1, se réduit à

$$\frac{2}{h^2}.(1-g^2).\gamma.\sin.(gv-\theta).\int\left(\frac{dQ}{dv}\right).\frac{dv}{u^2}.$$

$1-g^2$ étant de l'ordre m^2, nous ne conserverons dans ce produit, que le terme dépendant de $\sin.(2v-2mv-gv+\theta)$; et il résulte du développement précédent de $\frac{2}{h^2}.\int\left(\frac{dQ}{dv}\right).\frac{dv}{u^2}$, que ce terme est égal à

$$\frac{3.\bar{m}^2.(g^2-1)}{4.(1-m)}.\frac{a}{a_{,}}.\gamma.\sin.(2v-2mv-gv+\theta).$$

La troisième des équations (L) du n°. 1, se réduit ainsi à la forme suivante,

$$0 = \frac{dds}{dv^2} + s + \Gamma,$$

Γ étant la somme des termes que nous venons de considérer. Mais pour plus d'exactitude, il faut lui ajouter les termes dépendans du carré de la force perturbatrice, et qui peuvent avoir une influence sensible.

12. Le terme $\frac{3m'.u'^3.s}{2h^2.u^4}$ donne par sa variation, les deux suivans,

$$\frac{3m'.u'^3.\delta s}{2h^2.u^4} - \frac{6.m'.u'^3.s.\delta u}{h^2.u^5};$$

et il en résulte la fonction

$$\frac{3.\bar{m}^2}{2}.\frac{a}{a_{,}}.\delta s$$

$$+\frac{9.\bar{m}^2}{4}.\frac{a}{a_{,}}.\{B_{1}^{(7)}+B_{1}^{(8)}\}.c'^2\gamma.\sin.(gv-\theta)$$

$$+3.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\{A_{2}^{(0)}-\tfrac{5}{2}.A_{1}^{(1)}e^2\}.\gamma.\sin.(2v-2mv-gv+\theta)$$

$$-3.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.B_{1}^{(0)}.e\gamma.\sin.(2v-2mv-gv+cv+\theta-\varpi)$$

$$-3.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.A_{1}^{(1)}.e\gamma.\sin.(2v-2mv+gv-cv-\theta+\varpi)$$

$$+3.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\{B_{1}^{(0)}-A_{1}^{(1)}\}.e\gamma.\sin.(gv+cv-2v+2mv-\theta-\varpi)$$

$$+\frac{9.\bar{m}^2}{4}.\frac{a}{a_{,}}.B_{1}^{(0)}.e'\gamma.\left\{\begin{array}{l}\sin.(2v-2mv-gv+c'mv+\theta-\varpi') \\ +\sin.(2v-2mv-gv-c'mv+\theta+\varpi')\end{array}\right\}$$

$$+\frac{3.\bar{m}^2}{2}.\frac{a}{a_{,}}.\{5A_{1}^{(1)}-2A_{1}^{(11)}-\tfrac{5}{2}.B_{1}^{(0)}\}.e^2\gamma.\sin.(2cv+gv-2v+2mv-2\varpi-\theta)$$

$$+\frac{3.\bar{m}^2}{2}.\frac{a}{a_{,}}.\{5A_{1}^{(1)}-2A_{1}^{(11)}\}.e^2\gamma.\sin.(2v-2mv+gv-2cv-\theta+2\varpi).$$

Le terme $\frac{3m'.u'^3.s}{2h^2.u^4}.\cos.(2v-2v')$ donne par sa variation, les suivans,

$$\frac{3m'.u'^3.\delta s}{2h^2.u^4}.\cos.(2v-2v') - \frac{6m'.u'^3.s.\delta u}{h^2.u^5}.\cos.(2v-2v') + \frac{3m'.u'^3.s.\delta v'}{h^2.u^4}.\sin.(2v-2v');$$

et il en résulte la fonction

$$-\frac{3.\overline{m}^2}{4}.\frac{a}{a_{,}}.\{B_{\iota}^{(0)}+4A_{2}^{(0)}+\tfrac{7}{2}.B_{\iota}^{(10)}.e'^2-\tfrac{1}{2}.B_{\iota}^{(9)}.e'^2\}.(1-\tfrac{5}{2}e'^2).\gamma.\sin.(gv-\theta)$$

$$+\frac{3.\overline{m}^2}{2}.\frac{a}{a_{,}}.e\gamma.\left\{\begin{array}{l}\{(1+m).B_{\iota}^{(0)}-A_{\iota}^{(1)}\}.\sin.(gv-cv-\theta+\varpi)\\ +\{(1-m).B_{\iota}^{(0)}-A_{\iota}^{(1)}\}.\sin.(gv+cv-\theta-\varpi)\end{array}\right\}$$

$$-\frac{3.\overline{m}^2}{4}.\frac{a}{a_{,}}.e'\gamma.\left\{\begin{array}{l}\{B_{\iota}^{(9)}+\tfrac{7}{2}.B_{\iota}^{(0)}\}.\sin.(gv-c'mv-\theta+\varpi')\\ +\{B_{\iota}^{(10)}-\tfrac{1}{2}.B_{\iota}^{(0)}\}.\sin.(gv+c'mv-\theta-\varpi')\\ +B_{\iota}^{(8)}.\sin.(2v-2mv-gv+c'mv+\theta-\varpi')\\ +B_{\iota}^{(7)}.\sin.(2v-2mv-gv-c'mv+\theta+\varpi')\end{array}\right\}$$

$$-\frac{3.\overline{m}^2}{4}.\frac{a}{a_{,}}.e^2\gamma.\left\{\begin{array}{l}5A_{\iota}^{(1)}-2A_{\iota}^{(11)}+B_{\iota}^{(12)}\\ -\frac{(10+19.m+8.m^2)}{4}.B_{\iota}^{(0)}\end{array}\right\}.\sin.(2cv-gv-2\varpi+\theta)$$

$$-\frac{3.\overline{m}^2}{4}.\frac{a}{a_{,}}.B_{0}^{(11)}.e^2\gamma.\sin.(2v-2mv-2cv+gv+2\varpi-\theta).$$

Le terme $-\frac{3m'.u'^3}{2h^2.u^4}.\frac{ds}{dv}.\sin.(2v-2v')$ donne par sa variation,

$$-\frac{3m'.u'^3}{2h^2.u^4}.\frac{d.\delta s}{dv}.\sin.(2v-2v')+\frac{6.m'.u'^3}{h^2.u^5}.\delta u.\frac{ds}{dv}.\sin.(2v-2v') + \frac{3m'.u'^3}{h^2.u^4}.\frac{ds}{dv}.\delta v'.\cos.(2v-2v').$$

De-là résulte la fonction

$$-\frac{3.\overline{m}^2}{4}.\frac{a}{a_{,}}.\left\{\begin{array}{l}(2-2m-g).B_{\iota}^{(0)}+\tfrac{7}{2}.(2-3m-g).B_{\iota}^{(10)}.e'^2\\ -\tfrac{1}{2}.(2-m-g).B_{\iota}^{(9)}.e'^2\end{array}\right\}.(1-\tfrac{5}{2}.e'^2).\gamma.\sin.(gv-\theta)$$

$$+\frac{3.\overline{m}^2}{2}.\frac{a}{a_{,}}.e\gamma.\left\{\begin{array}{l}\{(1+m).(2-2m-g).B_{\iota}^{(0)}-A_{\iota}^{(1)}\}.\sin.(gv-cv-\theta+\varpi)\\ +\{(1-m).(2-2m-g).B_{\iota}^{(0)}+A_{\iota}^{(1)}\}.\sin.(gv+cv-\theta-\varpi)\end{array}\right\}$$

$$-\frac{3.\overline{m}^2}{4}.\frac{a}{a_{,}}.e'\gamma.\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}(2-m-g).B_{\iota}^{(9)}\\ +\tfrac{7}{2}.(2-2m-g).B_{\iota}^{(0)}\end{array}\right\}.\sin.(gv-c'mv-\theta+\varpi')\\ +\left\{\begin{array}{l}(2-3m-g).B_{\iota}^{(10)}\\ -\tfrac{1}{2}.(2-2m-g).B_{\iota}^{(0)}\end{array}\right\}.\sin.(gv+c'mv-\theta-\varpi')\\ +(g-m).B_{\iota}^{(8)}.\sin.(2v-2mv-gv+c'mv+\theta-\varpi')\\ +(g+m).B_{\iota}^{(7)}.\sin.(2v-2mv-gv-c'mv+\theta+\varpi')\end{array}\right\}$$

$$-\frac{3.\bar{m}^2}{4}\cdot\frac{a}{a_{\prime}}\cdot e^2\gamma\cdot\left\{\begin{array}{l}5A_1^{(1)}-2A_1^{(11)}+(2-2m-2c+g).B_1^{(12)}\\ -\frac{(10+19.m+8.m^2)}{4}\cdot(2-2m-g).B_1^{(0)}\end{array}\right\}\cdot\sin.(2cv-gv-2\varpi+\theta)$$

$$-\frac{3.\bar{m}^2}{4}\cdot\frac{a}{a_{\prime}}\cdot B_0^{(11)}\cdot e^2\gamma\cdot\sin.(2v-2mv-2cv+gv+2\varpi-\theta).$$

Enfin la fonction $\left(\frac{dds}{dv^2}+s\right)\cdot\frac{2}{h^2}\cdot\int\left(\frac{dQ}{dv}\right)\cdot\frac{dv}{u^2}$, donne par sa variation, les termes

$$\frac{3.\bar{m}^2}{4}\cdot\frac{a}{a_{\prime}}\cdot\{(2-2m-g)^2-1\}\cdot B_1^{(0)}\cdot(1-\tfrac{5}{2}e'^2)\cdot\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1-m}\cdot\gamma\cdot\sin.(gv-\theta)\\ +\frac{(10+19.m+8.m^2)}{2.(2c-2+2m)}\cdot e^2\gamma\cdot\sin.(2cv-gv-2\varpi+\theta)\end{array}\right\}.$$

Les termes dépendans du cube de la force perturbatrice sont insensibles.

13. En rassemblant tous ces termes, la troisième des équations (L) du n°. 1, deviendra

$$0=\frac{dds}{dv^2}+s+\tfrac{3}{2}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{\prime}}\cdot\left\{\begin{array}{l}1+2e^2-\frac{1}{2}\gamma^2+\frac{3}{2}\cdot e'^2\\ -\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{(3-2m-g).(g+m)}{1-m}.B_1^{(0)}+4A_2^{(0)}\right\}\cdot(1-\frac{5}{2}e'^2)\\ -\frac{7}{4}\cdot(3-3m-g).B_1^{(10)}.e'^2+\frac{1}{4}\cdot(3-m-g).B_1^{(9)}.e'^2\\ +\frac{5}{2}\cdot\{B_1^{(7)}+B_1^{(8)}\}\cdot e'^2\end{array}\right\}.\gamma.\sin.(gv-\theta)\quad;(L'')$$

$$-\tfrac{3}{4}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{\prime}}\cdot\left\{\begin{array}{l}(1+g)\cdot\left(1+2e^2-\frac{(2+m)}{4}\cdot\gamma^2-\frac{5}{2}e'^2\right)\\ +\frac{1-g^2}{1-m}-4A_2^{(0)}+10.A_1^{(1)}.e^2-2B_1^{(0)}\end{array}\right\}\cdot\gamma\cdot\sin.(2v-2mv-gv+\theta)$$

$$+\tfrac{3}{2}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{\prime}}\cdot\left\{\frac{1-g}{2}+B_2^{(1)}\right\}\cdot\gamma\cdot\sin.(2v-2mv+gv-\theta)$$

$$+\tfrac{3}{2}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{\prime}}\cdot\{B_2^{(2)}-2+(1-m).(3-2m-g).B_1^{(0)}\}\cdot e\gamma\cdot\sin.(gv+cv-\theta-\varpi)$$

$$+\tfrac{3}{2}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{\prime}}\cdot\{B_2^{(3)}-2-2A_1^{(1)}+(1+m).(3-2m-g).B_1^{(0)}\}\cdot e\gamma\cdot\sin.(gv-cv-\theta+\varpi)$$

$$+\tfrac{3}{2}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{\prime}}\cdot\{(1+g).(1-m)-2B_1^{(0)}+B_2^{(4)}\}\cdot e\gamma\cdot\sin.(2v-2mv-gv+cv+\theta-\varpi)$$

$$+\tfrac{3}{2}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{\prime}}\cdot\{(g-1).(1+m)+B_2^{(5)}-2A_1^{(1)}\}\cdot e\gamma\cdot\sin.(2v-2mv+gv-cv-\theta+\varpi)$$

$$+\tfrac{3}{2}.\overline{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\{(1+g).(1+m)+B_2^{(6)}+2A_1^{(1)}-2B_1^{(0)}\}.e\gamma.\sin.(2v-2mv-gv-cv+\theta+\varpi)$$

$$+\tfrac{3}{4}.\overline{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\{3+2B_1^{(7)}+\tfrac{1}{2}.(3-2m-g).B_1^{(0)}-(3-3m-g).B_1^{(10)}\}.e'\gamma.\sin.(gv+c'mv-\theta-\varpi')$$

$$+\tfrac{3}{4}.\overline{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\{3+2B_1^{(8)}-\tfrac{7}{2}.(3-2m-g).B_1^{(0)}-(3-m-g).B_1^{(9)}\}.e'\gamma.\sin.(gv-c'mv-\theta+\varpi')$$

$$+\tfrac{3}{4}.\overline{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\left\{\frac{1+g}{2}+2B_1^{(9)}+3B_1^{(0)}-(1+g-m).B_1^{(8)}\right\}.e'\gamma.\sin.(2v-2mv-gv+c'mv+\theta-\varpi')$$

$$+\tfrac{3}{4}.\overline{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\{2B_1^{(10)}-\tfrac{7}{2}.(1+g)+3B_1^{(0)}-(1+g+m).B_1^{(7)}\}.e'\gamma.\sin.\left(\begin{matrix}2v-2mv-gv\\-c'mv+\theta+\varpi'\end{matrix}\right)$$

$$+\tfrac{3}{4}.\overline{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\left\{\begin{matrix}2B_0^{(11)}-5-10.A_1^{(1)}+4A_1^{(11)}-(3-2m-2c+g).B_1^{(12)}\\+\left\{\frac{3-2m-g}{4}+\frac{\{(2-2m-g)^2-1\}}{2.(2c+2m-2)}\right\}.(10+19m+8m^2).B_1^{(0)}\end{matrix}\right\}.e^2\gamma.\sin.(2cv-gv-2\theta+\varpi)$$

$$+\tfrac{3}{4}.\overline{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\left\{\begin{matrix}2B_1^{(12)}+(1-g)\frac{(10+19.m+8.m^2)}{4}\\+10.A_1^{(1)}-4A_1^{(11)}-2B_0^{(11)}\end{matrix}\right\}.e^2\gamma.\sin.(2v-2mv-2cv+gv+2\varpi-\theta)$$

$$+\tfrac{3}{4}.\overline{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\left\{\begin{matrix}\frac{10+19.m+8.m^2}{2}+2B_1^{(13)}\\+10.A_1^{(1)}-4A_1^{(11)}-5B_1^{(0)}\end{matrix}\right\}.e^2\gamma.\sin.(2cv+gv-2v+2mv-2\varpi-\theta)$$

$$+\tfrac{3}{4}.\overline{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.(3+2B_2^{(14)}).\frac{a}{a'}.\gamma.\sin.(gv-v+mv-\theta)$$

$$+\tfrac{3}{4}.\overline{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.(\tfrac{1}{2}+2B_2^{(15)}).\frac{a}{a'}.\gamma.\sin.(gv+v-mv-\theta).$$

14. On doit faire sur l'intégration de l'équation différentielle précédente, des remarques analogues à celles du n°. 10. On considérera donc γ et θ comme variables en vertu de la variation de l'excentricité de l'orbe terrestre ; en substituant ensuite pour s, la fonction $\gamma.\sin.(gv-\theta)+\delta s$, et comparant d'abord les sinus et cosinus de $gv-\theta$, on aura les équations

$$0=\gamma.\frac{dd\theta}{dv^2}-2.\frac{d\gamma}{dv}.\left(g-\frac{d\theta}{dv}\right);$$
$$0=\frac{dd\gamma}{dv^2}-\gamma.\left\{\left(g-\frac{d\theta}{dv}\right)^2-1\right\}+(p''+q''.e'^2).\gamma;$$

$p''+q''.e'^2$ désignant le coëfficient de $\gamma.\sin.(gv-\theta)$ dans l'équa-

tion différentielle (L'') du n°. précédent, où l'on doit observer que $B_1^{(0)}$ et $A_2^{(0)}$ renferment déjà le facteur $1-\frac{1}{2}e'^2$. La première de ces équations donne en l'intégrant,

$$\frac{1}{g-\frac{d\theta}{dv}}=H.\gamma^2;$$

H étant une constante arbitraire. La seconde donne en négligeant $\frac{dd\gamma}{dv^2}$, ainsi que le carré de $q''.e'^2$,

$$\frac{d\theta}{dv}=g-\sqrt{1+p''}-\frac{\frac{1}{2}.q''.e'^2}{\sqrt{1+p''}};$$

et par conséquent si l'on regarde p'' et q'', comme constans, ce que l'on peut faire ici sans erreur sensible, on aura

$$\theta=gv-\sqrt{1+p''}.v-\frac{\frac{1}{2}.q''}{\sqrt{1+p''}}.\int e'^2.dv+\lambda,$$

λ étant une arbitraire; ce qui donne

$$\sin.(gv-\theta)=\sin.\left\{\sqrt{1+p''}.v+\frac{\frac{1}{2}.q''}{\sqrt{1+p''}}.\int e'^2.dv-\lambda\right\};$$

d'où il suit que, conformément aux observations, les nœuds de l'orbite lunaire, sur l'écliptique vraie, ont un mouvement rétrograde égal à $\{\sqrt{1+p''}-1\}.v+\frac{\frac{1}{2}.q''}{\sqrt{1+p''}}.\int e'^2.dv$. Ce mouvement n'est pas uniforme, à raison de la variabilité de e'; et l'équation séculaire de la longitude du nœud, est à l'équation séculaire du périgée, comme $\frac{q''}{\sqrt{1+p''}}$ est à $-\frac{q}{\sqrt{1+p}}$.

La tangente γ de l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique vraie, est pareillement variable, puisqu'elle est égale à $\left\{H.\left(g-\frac{d\theta}{dv}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}$; mais il est aisé de voir que sa variation est insensible, et c'est la raison pour laquelle les observations les plus anciennes n'indiquent aucun changement dans cette inclinaison, quoique la position de l'écliptique ait varié sensiblement dans l'intervalle qui nous en sépare.

On

On aura ensuite les équations suivantes,

$$0=\{1-(2-2m-g)^2\}.B_1^{(0)}-\tfrac{3}{4}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\left\{\begin{array}{l}(1+g).\left(1+2e^2-\frac{(2+m)}{4}.\gamma^2-\tfrac{5}{2}.e'^2\right)\\ +\frac{1-g^2}{1-m}-4A_2^{(0)}+10.A_1^{(1)}.e^2-2B_1^{(0)}\end{array}\right\}$$

$$0=\{1-(2-2m+g)^2\}.B_2^{(1)}+\tfrac{3}{2}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\left\{\frac{1-g}{2}+B_2^{(1)}\right\}$$

$$0=\{1-(g+c)^2\}.B_2^{(2)}+\tfrac{3}{2}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\{B_2^{(2)}-2+(1-m).(3-2m-g).B_1^{(0)}\}$$

$$0=\{1-(g-c)^2\}.B_2^{(3)}+\tfrac{3}{2}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\{B_2^{(3)}-2-2A_1^{(1)}+(1+m).(3-2m-g).B_1^{(0)}\}$$

$$0=\{1-(2-2m-g+c)^2\}.B_2^{(4)}+\tfrac{1}{2}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\{(1+g).(1-m)-2B_1^{(0)}+B_2^{(4)}\}$$

$$0=\{1-(2-2m+g-c)^2\}.B_2^{(5)}+\tfrac{3}{2}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\{(g-1).(1+m)+B_2^{(5)}-2A_1^{(4)}\}$$

$$0=\{1-(2-2m-g-c)^2\}.B_2^{(6)}+\tfrac{3}{2}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\{(1+g).(1+m)+B_2^{(6)}+2A_1^{(1)}-2B_1^{(0)}\}$$

$$0=\{1-(g+m)^2\}.B_1^{(7)}+\tfrac{3}{4}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\{3+2B_1^{(7)}+\tfrac{1}{2}.(3-2m-g).B_1^{(0)}-(3-3m-g).B_1^{(10)}\}$$

$$0=\{1-(g-m)^2\}.B_1^{(8)}+\tfrac{3}{4}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\{3+2B_1^{(8)}-\tfrac{7}{2}.(3-2m-g).B_1^{(0)}-(3-m-g).B_1^{(9)}\}$$

$$0=\{1-(2-m-g)^2\}.B_1^{(9)}+\tfrac{3}{4}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\left\{\frac{1+g}{2}+2B_1^{(9)}+3B_1^{(0)}-(1+g-m).B_1^{(8)}\right\}$$

$$0=\{1-(2-3m-g)^2\}.B_1^{(10)}+\tfrac{3}{4}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\{2B_1^{(10)}-\tfrac{7}{2}.(1+g)+3B_1^{(0)}-(1+g+m).B_1^{(7)}\}$$

$$0=\{1-(2c-g)^2\}.B_0^{(11)}+\tfrac{3}{4}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\left\{\begin{array}{l}2B_0^{(11)}-5-10.A_1^{(1)}+4A_1^{(11)}-(3-2m-2c+g).B_1^{(12)}\\ -(3-2m-g).(g+m-c).\frac{(10+19.m+8m^2)}{2.(2c+2m-2)}.B_1^{(0)}\end{array}\right\}$$

$$0=\{1-(2-2m-2c+g)^2\}.B_1^{(12)}+\tfrac{3}{4}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\left\{\begin{array}{l}2B_1^{(12)}+(1-g).\frac{(10+19.m+8m^2)}{4}\\ +10.A_1^{(1)}-4A_1^{(11)}-2B_0^{(11)}\end{array}\right\}$$

$$0=\{1-(2c+g-2+2m)^2\}.B_1^{(13)}+\tfrac{3}{4}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\left\{\begin{array}{l}\frac{10+19.m+8m^2}{2}+2B_1^{(13)}\\ +10.A_1^{(1)}-4A_1^{(11)}-5B_1^{(0)}\end{array}\right\}$$

$$0=\{1-(g+m-1)^2\}.B_2^{(14)}+\tfrac{3}{4}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\{3+2B_2^{(14)}\}$$

$$0=\{1-(g+1-m)^2\}.B_2^{(15)}+\tfrac{3}{4}.\bar{m}^2.\frac{a}{a_{,}}.\{\tfrac{5}{2}+2B_2^{(15)}\}.$$

15. Il nous reste présentement à déterminer la valeur du temps t en fonction de v. Pour cela, reprenons la première des équations (L) du n°. 1,

$$dt = \frac{dv}{hu^2 \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{h^2} \cdot \int \left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{dv}{u^2}}}.$$

Il faut par le n°. 6, y substituer, au lieu de u, la fonction

$$\frac{1}{a} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 + e^2 + \frac{1}{4}\gamma^2 + \epsilon + e.(1+e^2).\cos.(cv - \varpi) \\ -\frac{1}{4}\gamma^2.(1 + e^2 - \frac{1}{4}\gamma^2).\cos.(2gv - 2\theta) \end{array} \right\} + \delta u,$$

On aura d'abord, en développant le facteur $\frac{dv}{hu^2}$, un terme indépendant de cosinus, et qui par la nature du mouvement elliptique, doit être $\frac{a^2 dv}{\sqrt{a_{,}}}$ (livre second, n°. 16); on aura ensuite

$$dt = \frac{a^2 dv}{\sqrt{a_{,}}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 1 - 2e.(1 - \frac{1}{4}\gamma^2).\cos.(cv - \varpi) \\ + e^2.(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4}\gamma^2).\cos.(2cv - 2\varpi) \\ + \frac{1}{2}\gamma^2.(1 + \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2}\gamma^2).\cos.(2gv - 2\theta) - e^3.\cos.(3cv - 3\varpi) \\ -\frac{3}{4}e\gamma^2.\{\cos.(2gv - cv - 2\theta + \varpi) + \cos.(2gv + cv - 2\theta - \varpi)\} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{h^2} \cdot \int \left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{dv}{u^2} \\ + \frac{3}{2h^4} \cdot \left(\int \left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{dv}{u^2} \right)^2 \\ - \&c. \end{array} \right\} \\ -2a\delta u. \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}\gamma^2 - 3e.\cos.(cv - \varpi) + 3e^2.\cos.(2cv - 2\varpi) \\ + \frac{3}{4}\gamma^2.\cos.(2gv - 2\theta) - \frac{3}{2}e\gamma^2.\cos.(2gv - cv - 2\theta + \varpi) \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{h^2} \cdot \int \left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{dv}{u^2} \\ + \&c., \end{array} \right\} \\ + 3a^2.(\delta u)^2.(1 - 4e.\cos.(cv - \varpi)).\{1 - \&c.\} \end{array} \right\}.$$

La partie non périodique du second membre de cette équation est

$$\frac{a^2.dv}{\sqrt{a_{,}}} \cdot \left\{ 1 + \frac{27.m^4}{64.(1-m)^2} + \frac{3m^2.A_2^{(0)}}{4.(1-m)} + \frac{1}{2}.\{(A_2^{(0)})^2 + (A_1^{(1)}.e)^2\} \right\}.$$

Le coëfficient de dv dans cette fonction, n'est pas rigoureusement constant. On a vu dans le n°. 10, que l'expression de $\frac{1}{a}$ contient le terme $-\frac{3m^2.e'^2}{4a_{,}}$; ce qui donne dans a^2, le terme $\frac{3}{2}.\overline{m}^2.a_{,}.e'^2$; ainsi la quantité $\frac{a^2 dv}{\sqrt{a_{,}}}$ contient le terme $\frac{3}{2}.a_{,}^{\frac{3}{2}}.dv.\overline{m}^2.e'^2$; or on a à très-peu-près, $a_{,}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{n}$; $\overline{m}^2 = m^2$, l'expression du temps t contient

donc le terme $\frac{3m^2}{2n}.\int e'^2 dv$; et par conséquent la valeur de la longitude vraie de la lune, en fonction de sa longitude moyenne, contient le terme $-\frac{3}{2}.m^2.\int e'^2 dv$, ou $-\frac{3}{2}.m^2.\int n dt.e'^2$; d'où il suit que les trois équations séculaires des longitudes moyennes de la lune, de son périgée, et de ses nœuds, sont entre elles comme les trois quantités $3\overline{m}^2$, $\frac{-q}{\sqrt{1-p}}$, $\frac{q''}{\sqrt{1+p''}}$. A la vérité, les termes dépendans du carré de la force perturbatrice, changent un peu cette valeur de l'équation séculaire de la longitude moyenne; mais il est aisé de voir que les termes de cet ordre, qui ont une influence très-sensible sur l'équation séculaire du périgée, n'en ont qu'une très-petite et insensible sur celle du moyen mouvement.

La partie non périodique de $\frac{dv}{dt}$ est égale à $\frac{1}{n}$, et si l'on néglige les quantités de l'ordre m^4, ce coëfficient est $\frac{a^2}{\sqrt{a_{,}}}$. On a ensuite par le n°. 10, $\frac{1}{a}=\frac{1}{a_{,}}.(1-\frac{1}{2}m^2)$; ce qui donne $\frac{a}{a_{,}}=1+\frac{1}{2}m^2$, et $\frac{a^2}{\sqrt{a_{,}}}=\frac{1}{n}=a^{\frac{3}{2}}.\left(1+\frac{1}{4}m^2\right)$. On a de plus par le n°. 16 du second livre, $n'=a'^{-\frac{3}{2}}.\sqrt{m'}$; partant

$$\frac{n'^2}{n^2}=m^2=\frac{a^3.m'}{a'^3}.(1+\tfrac{1}{2}m^2)=\overline{m}^2.(1+\tfrac{1}{2}m^2);$$

d'où l'on tire

$$\overline{m}^2=m^2.(1-\tfrac{1}{2}m^2)\;;\quad \overline{m}^2.\frac{a}{a_{,}}=m^2.$$

Supposons maintenant que l'on ait

$$\begin{aligned}nt+\varepsilon=v+\tfrac{3}{2}m^2.\int(e'^2-E'^2).dv &+C_0^{(0)}.e.\sin.(cv-\varpi)\\ &+C_0^{(1)}.e^2.\sin.(2cv-2\varpi)\\ &+C_0^{(2)}.e^3.\sin.(3cv-3\varpi)\\ &+C_0^{(3)}.\gamma^2.\sin.(2gv-2\theta)\\ &+C_0^{(4)}.e\gamma^2.\sin.(2gv-cv-2\theta+\varpi)\\ &+C_0^{(5)}.e\gamma^2.\sin.(2gv+cv-2\theta-\varpi)\\ &+C_2^{(6)}.\sin.(2v-2mv)\\ &+C_1^{(7)}.e.\sin.(2v-2mv-cv+\varpi)\end{aligned}$$

$$+C_2^{(8)}.e.\sin.(2v-2mv+cv-\varpi)$$
$$+C_2^{(9)}.e'.\sin.(2v-2mv+c'mv-\varpi')$$
$$+C_2^{(10)}.e'.\sin.(2v-2mv-c'mv+\varpi')$$
$$+C_1^{(11)}.e'.\sin.(c'mv-\varpi')$$
$$+C_1^{(12)}.ee'.\sin.(2v-2mv-cv+c'mv+\varpi-\varpi')$$
$$+C_1^{(13)}.ee'.\sin.(2v-2mv-cv-c'mv+\varpi+\varpi')$$
$$+C_1^{(14)}.ee'.\sin.(cv+c'mv-\varpi-\varpi')$$
$$+C_1^{(15)}.ee'.\sin.(cv-c'mv-\varpi+\varpi')$$
$$+C_1^{(16)}.e^2.\sin.(2cv-2v+2mv-2\varpi)$$
$$+C_1^{(17)}.\gamma^2.\sin.(2gv-2v+2mv-2\theta)$$
$$+C_1^{(18)}.e'^2.\sin.(2c'mv-2\varpi')$$
$$+C_1^{(19)}.\frac{a}{a'}.\sin.(v-mv)$$
$$+C_1^{(20)}.\frac{a}{a'}.e'.\sin.(v-mv+c'mv-\varpi').$$

On aura

$$C_0^{(0)}=\frac{-2.(1-\frac{1}{4}\gamma^2)+\frac{15.m^2.A_1^{(1)}}{4.(1-m)}+3A_2^{(0)}.A_1^{(1)}}{c};$$

$$C_0^{(1)}=\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}.e^2-\frac{3}{4}.\gamma^2-2A_2^{(10)}}{2c};$$

$$C_0^{(2)}=-\frac{1}{3c};$$

$$C_0^{(3)}=\frac{\frac{1}{2}.(1+\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\gamma^2)-2A_2^{(12)}+3A_0^{(15)}.e^2}{2g};$$

$$C_0^{(4)}=\frac{-\frac{3}{4}-2A_0^{(15)}}{2g-c};$$

$$C_0^{(5)}=-\frac{\frac{3}{4}}{2g+c};$$

$$C_2^{(6)}=\frac{\left\{\begin{array}{l}\frac{-3m^2.(1+2e^2-\frac{1}{2}.e'^2)}{4.(1-m)}-3m^2e^2.\left\{\frac{1+m}{2-2m-c}+\frac{1-m}{2-2m+c}\right\}\\ -2A_2^{(0)}.(1+\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}\gamma^2)+3e^2A_1^{(1)}+3e^2A_2^{(2)}\end{array}\right\}}{2-2m};$$

$$C_1^{(7)} = \frac{\left\{\begin{array}{l} \dfrac{3m^2.(1+2e^2-\frac{1}{4}\gamma^2-\frac{5}{2}.e'^2)}{4.(1-m)} + \dfrac{3m^2.(1+m).\{1+\frac{3}{4}e^2-\frac{1}{4}\gamma^2-\frac{5}{2}.e'^2\}}{2-2m-c} \\ -\dfrac{3m^2.e^2.(10+19m+8m^2)}{8.(2c-2+2m)} - 2A_1^{(1)}.(1+\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}\gamma^2)+3A_2^{(0)}+3e^2.A_1^{(11)} \end{array}\right\}}{2-2m-c}$$

$$C_2^{(8)} = \frac{\dfrac{3m^2}{4.(1-m)} + \dfrac{3m^2.(1-m)}{2-2m+c} - 2A_2^{(2)} + 3A_2^{(0)} - 3A_1^{(1)}.e^2}{2-2m+c};$$

$$C_2^{(9)} = \frac{\dfrac{3m^2}{4.(2-m)} - 2A_2^{(3)} + 3A_1^{(6)}.e^2}{2-m};$$

$$C_2^{(10)} = \frac{-\dfrac{21.m^2}{4.(2-3m)} - 2A_2^{(4)} + 3A_1^{(7)}.e^2}{2-3m};$$

$$C_1^{(11)} = \frac{\left\{\begin{array}{l} -3m.\{4A_2^{(0)}+A_2^{(3)}-A_2^{(4)}-10.A_1^{(1)}.e^2+\frac{5}{2}.(A_1^{(7)}-A_1^{(6)}).e^2\} \\ +\left\{\dfrac{3m^2.A_2^{(0)}}{4}+\dfrac{27.m^4}{32.(1-m)}\right\}.\left\{\dfrac{7}{2-3m}-\dfrac{1}{2-m}\right\} \\ +\left\{\dfrac{3m^2}{4.(1-m)}+3A_2^{(0)}\right\}.\{A_2^{(3)}+A_2^{(4)}\}-2A_2^{(5)}.(1+\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}\gamma^2) \\ +3.(A_1^{(8)}+A_1^{(9)}).e^2+3A_1^{(1)}.e^2.(A_1^{(6)}+A_1^{(7)}) \\ +\dfrac{3m^2}{4}.(11.C_2^{(6)}+2C_2^{(9)}-2C_2^{(10)}) \end{array}\right\}}{m};$$

$$C_1^{(12)} = \frac{-\dfrac{3m^2.(2+m)}{4.(2-m-c)} - \dfrac{3m^2}{4.(2-m)} - 2A_1^{(6)} + 3A_2^{(3)}}{2-m-c};$$

$$C_1^{(13)} = \frac{\dfrac{21.m^2.(2+3m)}{4.(2-3m-c)} + \dfrac{21.m^2}{4.(2-3m)} - 2A_1^{(7)} + 3A_2^{(4)}}{2-3m-c};$$

$$C_1^{(14)} = \frac{-2A_1^{(8)} + 3A_2^{(5)}}{c+m};$$

$$C_1^{(15)} = \frac{-2A_1^{(9)} + 3A_2^{(5)}}{c-m}$$

$$C_{,}^{(16)}=\frac{\left\{\begin{array}{l}\frac{3m^2.(10+19m+8m^2)}{8.(2c-2+2m)}-\frac{3m^2.(1+m)}{2-2m-c}-\frac{9.m^2}{16.(1-m)}\\ -3A_2^{(0)}+3A_{,}^{(1)}-2A_{,}^{(11)}-\frac{\left\{3m^2A_2^{(10)}+\frac{15.m^2}{4}.(A_{,}^{(1)})^2\right\}}{2c-2+2m}\end{array}\right\}}{2c-2+2m}.$$

Cette valeur de $C_{,}^{(16)}$ semble être de l'ordre zéro ; car son numérateur renferme plusieurs termes de l'ordre m, et son diviseur est du même ordre. Mais on a vu dans le n°. 5, qu'en n'ayant égard qu'à la première puissance de la force perturbatrice, la valeur de $C_{,}^{(16)}$, ne peut avoir pour diviseur, le carré de $2c-2+2m$; il faut donc que l'ensemble de ces termes se détruise aux quantités près de l'ordre m : c'est en effet ce que le calcul confirme *à posteriori*. Il suit de-là que dans les valeurs de $A_{,}^{(1)}$ et de $A_{,}^{(11)}$ de l'expression de $C_{,}^{(16)}$, on doit rejeter les termes dépendans des carrés de e, e' et γ. Chacun de ces termes introduit dans $C_{,}^{(16)}$, des quantités de l'ordre e^2, tandis que leur ensemble n'y produit qu'une quantité de l'ordre e^2m, que l'on peut conséquemment négliger; il y a donc de l'inconvénient à ne considérer qu'une partie de ces termes, et il est préférable de les négliger tous. C'est un de ces cas singuliers de l'analyse des approximations, dans lesquels on peut s'éloigner de la vérité, en considérant un plus grand nombre de termes.

On a ensuite

$$C_{,}^{(17)}=\frac{\frac{3m^2.(2+m)}{8.(2g-2+2m)}-\frac{3m^2}{16.(1-m)}-2A_{,}^{(13)}-\frac{3}{4}A_2^{(0)}-\frac{3m^2.A_2^{(12)}}{2g-2+2m}}{2g-2+2m}.$$

On doit appliquer à cette valeur de $C_{,}^{(17)}$, une remarque analogue à celle que nous venons de faire sur $C_{,}^{(16)}$. Enfin on a

$$C_{,}^{(18)}=-\frac{A_2^{(14)}}{m};$$

$$C_{,}^{(19)}=\frac{\left\{\begin{array}{l}\frac{-3m^2}{8.(1-m)}+\frac{3m^2.(5+3m)}{4.(1-m)}.A_{,}^{(17)}-2A_{,}^{(17)}.(1+\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}\gamma^2)\\ +3A_2^{(0)}.A_{,}^{(17)}\end{array}\right\}}{1-m}$$

$$C_0^{(20)}=-2A_0^{(18)}.$$

16. Déterminons présentement les valeurs numériques de ces divers coëfficiens. Pour cela, nous remarquerons que les observations donnent

$$m = 0{,}0748013\,;$$
$$c = 0{,}99154801\,;$$
$$g = 1{,}00402175\,;$$
$$e' = 0{,}016814\,;\ \text{à l'époque de } 1750.$$
$$\gamma = 0{,}0900807.$$

Suivant les observations, l'argument $C_0^{(0)}.e.\sin.(cv - \varpi)$ est à très-peu-près égal à $-69992'',3.\sin.(cv - \varpi)$. On a donné dans le n°. précédent, la valeur analytique de $C_0^{(0)}$; en y substituant pour $A_2^{(0)}$ et $A_1^{(1)}$, leurs valeurs qu'une première approximation m'a fait connoître; j'en ai conclu

$$e = 0{,}05487293.$$

Cette valeur a toute la précision nécessaire pour la détermination des coëfficiens $A_2^{(0)}$, $A_1^{(1)}$, $A_2^{(2)}$, &c. J'ai supposé, conformément aux phénomènes des marées, la masse de la lune $\frac{1}{58{,}7}$ de celle de la terre. Cela posé ; les équations entre ces coëfficiens, trouvées dans les n°s. 10 et 14, deviennent

$$A_2^{(0)} = 0{,}00723508 - 0{,}00501814.\{B_1^{(0)} - B_2^{(1)}\};$$
$$A_1^{(1)} = 0{,}204044 - 0{,}0660894.A_2^{(0)} - 0{,}0480577.\{B_2^{(5)} - B_2^{(6)}\};$$
$$A_2^{(2)} = -0{,}00372953\,;$$
$$A_2^{(3)} = -0{,}00315160 - 0{,}00449610.B_1^{(9)};$$
$$A_2^{(4)} = 0{,}0289026 - 0{,}00564793.B_1^{(10)};$$
$$A_1^{(6)} = -0{,}193315 + 0{,}104996.A_1^{(1)} + 0{,}372796.A_1^{(9)};$$
$$A_1^{(7)} = 0{,}538027 + 0{,}0334044.A_1^{(1)} + 0{,}135144.A_1^{(8)};$$
$$A_1^{(8)} = -0{,}0908432 + 0{,}139071.A_1^{(1)} - 0{,}280299.A_1^{(7)};$$
$$A_1^{(9)} = 0{,}0791193 + 1{,}055799.A_1^{(1)} + 0{,}270902.A_1^{(6)};$$
$$A_2^{(10)} = 0{,}00285368 - 0{,}00415018.B_0^{(11)};$$
$$A_1^{(11)} = 0{,}366100 - 0{,}0172338.A_1^{(1)} - 0{,}259744.A_2^{(10)} - 0{,}324680.(A_1^{(1)})^2;$$
$$A_2^{(12)} = 0{,}00265066\,;$$
$$A_1^{(13)} = 0{,}0523335 - 1{,}555935.B_1^{(0)} - 0{,}220276.A_2^{(12)};$$
$$A_2^{(14)} = -0{,}0129890\,;$$

$A_0^{(15)} = -0,1007403 + 0,0385084 . A_1^{(1)} + 2,09016 . A_1^{(13)}$
$\quad - 1,022473 . A_1^{(16)} - 36,11032 . \{B_2^{(3)} - B_1^{(0)} . B_2^{(5)}\};$

$A_1^{(16)} = 0,114623 + 0,166591 . A_0^{(15)} - 5,07811 . B_2^{(4)};$

$A_1^{(17)} = -0,121028 + 0,937593 . A_2^{(0)} - 0,00003 1563 . A_0^{(18)}$
$\quad - 0,139767 . \{B_2^{(14)} + B_2^{(15)}\};$

$A_0^{(18)} = 1,208124 + 1,018700 . A_1^{(17)} - 5,074801 . A_1^{(19)};$

$A_1^{(19)} = -0,121295 + 0,675879 . A_1^{(17)} + 0,183834 . A_0^{(18)};$

$B_1^{(0)} = 0,0287031 - 0,0574772 . A_2^{(0)} + 0,000432665 . A_1^{(1)};$

$B_2^{(1)} = -0,00000236395;$

$B_2^{(2)} = -0,00564433 + 0,0048210 . B_1^{(0)};$

$B_2^{(3)} = 0,0166486 + 0,0166486 . A_1^{(1)} - 0,0165194 . B_1^{(0)};$

$B_2^{(4)} = 0,00656716 - 0,00708386 . B_1^{(0)};$

$B_2^{(5)} = 0,0000147361 - 0,00681821 . A_1^{(1)};$

$B_2^{(6)} = -0,0183098 - 0,0170013 . \{A_1^{(1)} - B_1^{(0)}\};$

$B_1^{(7)} = 0,0809777 + 0,0249192 . B_1^{(0)} - 0,0478194 . B_1^{(10)};$

$B_1^{(8)} = -0,0868568 + 0,187099 . B_1^{(0)} + 0,0556224 . B_1^{(9)};$

$B_1^{(9)} = -0,0263090 - 0,0787687 . B_1^{(0)} + 0,0506541 . B_1^{(8)};$

$B_1^{(10)} = 0,0712575 - 0,03047765 . B_1^{(0)} + 0,0211192 . B_1^{(7)};$

$B_0^{(11)} = 0,421270 + 0,842540 . A_1^{(1)} - 0,337016 . A_1^{(11)} + 0,586564 . B_1^{(0)}$
$\quad + 0,157666 . B_1^{(12)};$

$B_1^{(12)} = 0,000194141 - 0,168403 . A_1^{(1)} + 0,0673614 . \{A_1^{(11)} + \tfrac{1}{2} . B_0^{(11)}\};$

$B_1^{(13)} = 0.0847889 + 0,147896 . \{A_1^{(1)} - \tfrac{1}{2} . B_1^{(0)}\} - 0,0591586 . A_1^{(11)};$

$B_1^{(14)} = -0,0125619;$

$B_1^{(15)} = 0,00386625.$

J'ai conclu de ces équations, les valeurs suivantes,

$A_2^{(0)} = 0,00709262;$
$A_1^{(1)} = 0,202619;$
$A_2^{(2)} = -0,00372953;$
$A_2^{(3)} = -0,00300427;$
$A_2^{(4)} = 0,0284957;$
$A_1^{(6)} = -0,0698493;$
$A_1^{(7)} = 0,516751;$
$A_1^{(8)} = -0,207510;$
$A_1^{(9)} = 0,274122;$
$A_2^{(10)} = 0,00081065;$

$A_2^{(12)}$

$$A_1^{(11)} = 0{,}349068;$$
$$A_2^{(12)} = 0{,}00265066;$$
$$A_1^{(13)} = 0{,}0075875;$$
$$A_2^{(14)} = -0{,}0129890;$$
$$A_0^{(15)} = -0{,}742373;$$
$$A_1^{(16)} = -0{,}041378;$$
$$A_1^{(17)} = -0{,}113197;$$
$$A_0^{(18)} = 1{,}08469;$$
$$A_1^{(19)} = 0{,}001601;$$
$$B_1^{(0)} = 0{,}0283831;$$
$$B_2^{(1)} = -0{,}0000236395,$$
$$B_2^{(2)} = -0{,}00550748;$$
$$B_2^{(3)} = 0{,}0195530;$$
$$B_2^{(4)} = 0{,}00636608;$$
$$B_2^{(5)} = -0{,}00136676;$$
$$B_2^{(6)} = -0{,}0212720;$$
$$B_1^{(7)} = 0{,}0782400;$$
$$B_1^{(8)} = -0{,}0833684;$$
$$B_1^{(9)} = -0{,}0327678;$$
$$B_1^{(10)} = 0{,}0720448;$$
$$B_0^{(11)} = 0{,}491954;$$
$$B_1^{(12)} = 0{,}0061023;$$
$$B_1^{(13)} = 0{,}0920621;$$
$$B_2^{(14)} = -0{,}0125619;$$
$$B_2^{(15)} = 0{,}00386625.$$

Au moyen de ces valeurs, j'ai rectifié la valeur de e, en faisant usage de l'équation

$$C_0^{(0)}.e = -69992'',3.$$

L'expression de $C_0^{(0)}$ trouvée dans le n°. 15, donne

$$C_0^{(0)} = -2{,}003974;$$

d'où j'ai conclu

$$e = 0{,}05486281;$$

ce qui diffère très-peu de la valeur déjà employée. J'ai trouvé ensuite,

$$C_0^{(1)} = 0{,}752886;$$
$$C_0^{(2)} = -0{,}336175;$$
$$C_0^{(3)} = 0{,}243118;$$
$$C_0^{(4)} = 0{,}722823;$$
$$C_0^{(5)} = -0{,}250034;$$
$$C_2^{(6)} = -0{,}00919876;$$
$$C_1^{(7)} = -0{,}414046;$$
$$C_2^{(8)} = 0{,}0129865;$$
$$C_2^{(9)} = 0{,}00392546;$$
$$C_2^{(10)} = -0{,}0387853;$$
$$A_2^{(5)} = -0{,}00571628;$$
$$C_1^{(11)} = 0{,}196755;$$
$$C_1^{(12)} = 0{,}127650;$$
$$C_1^{(13)} = -1{,}081734;$$
$$C_1^{(14)} = 0{,}373115;$$
$$C_1^{(15)} = -0{,}616738.$$

Il faut par le n°. précédent, employer dans le calcul de $C_1^{(16)}$ et de $C_1^{(17)}$, les valeurs de $A_1^{(1)}$, $A_1^{(11)}$ et $A_1^{(13)}$, déterminées en n'ayant point égard aux carrés de l'excentricité et de l'inclinaison de l'orbite lunaire. J'ai trouvé ainsi les valeurs suivantes de $A_1^{(1)}$, $A_1^{(11)}$, $A_1^{(13)}$ et $B_1^{(0)}$ dont on doit faire usage dans ce calcul,

$$A_1^{(1)} = 0{,}201816;$$
$$A_1^{(11)} = 0{,}349187;$$
$$A_1^{(13)} = 0{,}0077734;$$
$$B_1^{(0)} = 0{,}0282636;$$

d'où l'on tire

$$C_1^{(16)} = 0{,}272377;$$
$$C_1^{(17)} = 0{,}033825.$$

On a ensuite,

$$C_1^{(18)} = 0{,}173647;$$
$$C_1^{(19)} = -0{,}236616;$$
$$C_0^{(20)} = -2{,}16938.$$

Cela posé, l'expression de $nt+\varepsilon$ du n°. 15, devient, en réduisant en secondes, ses coëfficiens,

$$
\begin{aligned}
nt+\varepsilon = v & +\tfrac{3}{2}.m^2.\int(e'^2-E'^2).dv \\
& - 69992'',30.\sin.(cv-\varpi) \\
& + 1442'',66.\sin.(2cv-2\varpi) \\
& - 35'',34.\sin.(3cv-3\varpi) \\
& + 1255'',92.\sin.(2gv-2\theta) \\
& + 204'',86.\sin.(2gv-cv-2\theta+\varpi) \\
& - 70'',86.\sin.(2gv+cv-2\theta-\varpi) \\
& - 5856'',11.\sin.(2v-2mv) \\
& - 14461'',28.\sin.(2v-2mv-cv+\varpi) \\
& + 453'',58.\sin.(2v-2mv+cv-\varpi) \\
& + 42'',02.\sin.(2v-2mv+c'mv-\varpi') \\
& - 415'',16.\sin.(2v-2mv-c'mv+\varpi') \\
& + 2106'',09.\sin.(c'mv-\varpi') \\
& + 74'',96.\sin.(2v-2mv-cv+c'mv+\varpi-\varpi') \\
& - 635'',26.\sin.(2v-2mv-cv-c'mv+\varpi+\varpi') \\
& + 219'',11.\sin.(cv+c'mv-\varpi-\varpi') \\
& - 362'',18.\sin.(cv-c'mv-\varpi+\varpi') \\
& + 521'',91.\sin.(2cv-2v+2mv-2\varpi) \\
& + 174'',74.\sin.(2gv-2v+2mv-2\theta) \\
& + 31'',25.\sin.(2c'mv-2\varpi') \\
& + 376'',586.(1+i).\sin.(v-mv) \\
& - 58'',053.(1+i).\sin.(v-mv+c'mv-\varpi').
\end{aligned}
$$

Les deux derniers termes ont été déterminés, en supposant $\frac{a}{a'}=\frac{1+i}{400}$. Cette fraction dépend des parallaxes du soleil et de la lune ; elle diffère très-peu de $\frac{1}{400}$; mais pour plus de généralité, nous l'affectons du coëfficient indéterminé $1+i$, et en comparant le terme dépendant de sin. $(v-mv)$, au résultat des observations, nous en conclurons dans la suite, la parallaxe solaire.

Il est facile de voir, par ce qui précède, que les perturbations de l'orbe terrestre par la lune, introduisent dans $A_1^{(17)}$, la quantité $0,25044.\mu$, et par conséquent, dans $C_1^{(17)}$ la quantité $-0,54139.\mu$; d'où résulte dans l'expression de la longitude vraie de la lune, l'inégalité $0,54139.\mu.\frac{a}{a'}.\sin.(v-mv)$. L'action directe de

la lune sur la terre, produit dans le mouvement de cette planète, l'inégalité $\frac{a}{a'}.\mu.\sin.(v - mv)$; cette action est donc réfléchie à la lune par le moyen du soleil, mais affoiblie dans le rapport de 0,54139 à l'unité.

L'expression précédente de $nt+\varepsilon$ renferme les quantités c et g, et ces quantités dépendent de l'action du soleil. Nous avons donné leurs valeurs analytiques dans les n°s. 10 et 14. En les réduisant en nombres, on trouve

$$c = 0{,}991567;$$
$$g = 1{,}0040105.$$

Le mouvement $(1-c).v$ du périgée lunaire, est donc, par la théorie précédente, égal à $0{,}008433.v$. Ce mouvement, par les observations, est égal à $0{,}008452.v$; ce qui ne diffère du précédent, que de sa quatre cent quarante-cinquième partie.

Le mouvement du périgée est assujéti à une équation séculaire dont nous avons donné l'expression analytique dans le n°. 10. En la réduisant en nombres, elle devient

$$3{,}00052.\tfrac{3}{2}.m^2.\int(e'^2 - E'^2).dv.$$

Elle a un signe contraire à l'équation séculaire du mouvement moyen, et elle est à fort peu près trois fois plus grande.

Le mouvement rétrograde $(g-1).v$ du nœud de l'orbite lunaire, est, par la théorie précédente, $0{,}0040105.v$. Ce mouvement, par les observations, est égal à $0{,}00402175.v$; ce qui ne diffère pas du précédent, de sa trois cent cinquantième partie.

Ce mouvement du nœud est assujéti à une équation séculaire, dont nous avons donné l'expression analytique dans le n°. 14. En la réduisant en nombres, elle devient

$$0{,}735452.\tfrac{3}{2}.m^2.\int(e'^2 - E'^2).dv.$$

Elle a un signe contraire à celle de la longitude moyenne de la lune; d'où il suit que les mouvemens des nœuds et du périgée se rallentissent, quand celui de la lune s'accélère, et les équations séculaires de ces trois mouvemens sont constamment dans le rapport des nombres, 3,00052, 0,735452, et 1. On doit donc, dans

l'expression précédente de $nt+\varepsilon$, substituer, au lieu des angles cv et gv, les quantités

$$cv - 3{,}00052\cdot\tfrac{3}{2}\cdot m^2\cdot\int(e'^2 - E'^2)\cdot dv\,;$$
$$gv + 0{,}735452\cdot\tfrac{3}{2}\cdot m^2\cdot\int(e'^2 - E'^2)\cdot dv.$$

L'équation séculaire de l'anomalie moyenne est ainsi,

$$- 4{,}00052\cdot\tfrac{3}{2}\cdot m^2\cdot\int(e'^2 - E'^2)\cdot dv\,;$$

ou à très-peu-près quadruple de celle du moyen mouvement.

17. Nous allons présentement déterminer quelques-unes des inégalités les plus sensibles du quatrième ordre. L'une de ces inégalités est relative à l'angle $2v - 2mv - 2gv + cv + 2\theta - \varpi$, et nous avons déterminé précédemment la partie de $a\delta u$ qui dépend du cosinus de cet angle. On trouve ensuite par le n°. 15, que l'expression de $nt+\varepsilon$, renferme l'inégalité

$$\frac{\left\{-\frac{3.m^2.(2+m)}{8.(2g-2+2m)} - 2A_{\iota}^{(16)} + 3A_{\iota}^{(13)}\right\}}{2-2m-2g+c}\cdot e\gamma^2\cdot\sin.\begin{pmatrix}2v - 2mv - 2gv\\ + cv + 2\theta - \varpi\end{pmatrix}.$$

Cette inégalité réduite en nombres, devient

$$26'',77\cdot\sin.(2v - 2mv - 2gv + cv + 2\theta - \varpi).$$

Considérons encore l'inégalité relative à l'angle $2cv + 2v - 2mv - 2\varpi$. Si l'on rassemble tous les termes dépendans du cosinus de cet angle, que donne le développement de la seconde des équations (L) du n°. 1, et que nous avons déterminés dans le n°. 6; cette équation devient, en n'ayant égard qu'à ces termes,

$$0 = \frac{ddu}{dv^2} + u + \frac{3.\overline{m}^2}{2a_{,}}\cdot\frac{(10-19.m+8m^2).(2+c-m)}{4.(c-m+1)}\cdot e^2.\cos.(2cv+2v-2mv-2\varpi);$$

en nommant donc $A'^{(0)}_{2}\cdot e^2\cdot\cos.(2cv+2v-2mv-2\varpi)$, le terme correspondant de $a\delta u$; on aura

$$A'^{(0)}_{2} = \frac{\frac{3.m^2}{2}\cdot(10-19m+8m^2)\cdot(2-m+c)}{4.(c-m+1)\cdot\{4.(c-m+1)^2-1\}}.$$

Si l'on nomme ensuite $C'^{(0)}_{2}\cdot e^2\cdot\sin.(2cv+2v-2mv-2\varpi)$, le

terme correspondant de l'expression de $nt+\varepsilon$; on trouve par le n°. 15,

$$C'^{(0)}_2 = \frac{\left\{\begin{array}{l}\frac{-3.m^2}{2}.\frac{(10-19m+8m^2)}{8.(c-m+1)} - \frac{3.m^2.(1-m)}{2-2m+c} - \frac{9.m^2}{16.(1-m)} \\ -2A'^{(0)}_2 + 3A^{(2)}_2 - 3A^{(0)}_2\end{array}\right\}}{2c-2m+2}.$$

En réduisant ces formules en nombres, on a

$$A'^{(0)}_2 = 0{,}00201041;$$
$$C'^{(0)}_2 = -0{,}0130618;$$

d'où résulte dans $nt+\varepsilon$, l'inégalité

$$-25'',03 \text{ sin.} (2cv+2v-2mv-2\varpi).$$

L'expression de dt du n°. 15, donne dans $nt+\varepsilon$, le terme

$$\frac{3A^{(4)}_2.ee'.\text{sin.}(2v-2mv+cv-c'mv-\varpi+\varpi')}{2-3m+c}.$$

Ce terme est sensible, à cause de la grandeur du coëfficient $A^{(4)}_2$; il est donc utile de considérer l'inégalité relative à l'argument $2v-2mv+cv-c'mv-\varpi+\varpi'$. La seconde des équations (L) du n°. 1, donne, en n'ayant égard qu'à ces termes que nous avons développés dans le n°. 6,

$$0 = \frac{ddu}{dv^2} + u - \frac{21.m^2.(2-3m).(4-3m+c)}{4.(2-3m+c)}.ee'.\text{cos.}\left(\begin{array}{l}2v-2mv+cv \\ -c'mv-\varpi+\varpi'\end{array}\right).$$

Soit

$$A'^{(1)}_2.ee'.\text{cos.}(2v-2mv+cv-c'mv-\varpi+\varpi')$$

la partie de $a\delta u$ dépendante de l'argument dont il s'agit; on aura

$$A'^{(1)}_2 = -\frac{21.m^2.(2-3m).(4-3m+c)}{4.(2-3m+c).\{(2-3m+c)^2-1\}}.$$

Si l'on nomme ensuite

$$C'^{(1)}_2.ee'.\text{sin.}(2v-2mv+cv-c'mv-\varpi+\varpi')$$

la partie de $nt+\varepsilon$, relative au même argument; on trouve par le n°. 15,

$$C'^{(1)}_2 = \frac{\frac{21.m^2.(2-3m)}{4.(2-3m+c)} + \frac{21.m^2}{4.(2-3m)} - 2A'^{(1)}_2 + 3A^{(4)}_2}{2-3m+c}.$$

En réduisant ces formules en nombres, on trouve

$$A'^{(1)}_{2} = -0{,}0134975;$$
$$C'^{(1)}_{2} = 0{,}0534480;$$

ce qui donne dans $nt+\varepsilon$, l'inégalité

$$31'',39 \cdot \sin.(2v - 2mv + cv - c'mv - \varpi + \varpi').$$

Les inégalités dépendantes des angles $2cv - 2v + 2mv \pm c'mv - 2\varpi \mp \varpi'$, semblent devoir être sensibles par les grands diviseurs que les intégrations leur font acquérir ; il importe donc de les déterminer avec soin. En suivant l'analyse exposée précédemment, et en n'ayant égard qu'aux quantités du quatrième ordre ; si l'on représente la partie correspondante de $a\delta u$ par

$$A'^{(2)}_{1} \cdot e^2 e' \cdot \cos.(2cv - 2v + 2mv + c'mv - 2\varpi - \varpi')$$
$$+ A'^{(3)}_{1} \cdot e^2 e' \cdot \cos.(2cv - 2v + 2mv - c'mv - 2\varpi + \varpi');$$

l'équation différentielle en u devient

$$0 = \frac{ddu}{dv^2} + u + \frac{3.\bar{m}^2}{a_{\prime}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{7.(2+11.m+8.m^2)}{16} - \frac{7.(10+19.m+8.m^2)}{8.(2c-2+3m)} \\ - \frac{5.A_1^{(8)}}{2c-2+3m} - \frac{1}{2}.A'^{(2)}_{1} \end{array} \right\} . e^2 e' . \cos. \left(\begin{array}{l} 2cv - 2v + 2mv \\ + c'mv - 2\varpi - \varpi' \end{array} \right)$$

$$+ \frac{3.\bar{m}^2}{a_{\prime}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{10+19.m+8.m^2}{8.(2c-2+m)} - \frac{(2+11.m+8.m^2)}{16} \\ - \frac{5.A_1^{(9)}}{2c-2+m} - \frac{1}{2}.A'^{(3)}_{2} \end{array} \right\} . e^2 e' . \cos. \left(\begin{array}{l} 2cv - 2v + 2mv \\ - c'mv - 2\varpi + \varpi' \end{array} \right);$$

on aura donc

$$A'^{(2)}_{1} = \frac{-3m^2}{1 - \frac{1}{2}m^2 - (2c-2+3m)^2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{7.(2+11.m+8.m^2)}{16} \\ \frac{-7.(10+19.m+8.m^2) - 40.A_1^{(8)}}{8.(2c-2+3m)} \end{array} \right\};$$

$$A'^{(3)}_{1} = \frac{-3m^2}{1 - \frac{1}{2}m^2 - (2c-2+m)^2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{10+19.m+8.m^2 - 40.A_1^{(9)}}{8.(2c-2+m)} \\ - \frac{(2+11.m+8.m^2)}{16} \end{array} \right\}.$$

Si l'on désigne la partie correspondante de $nt+\varepsilon$, par

$$C'^{(2)}_{1} \cdot e^2 e' \cdot \cos.(2cv - 2v + 2mv + c'mv - 2\varpi - \varpi')$$
$$+ C'^{(3)}_{1} \cdot e^2 e' \cdot \cos.(2cv - 2v + 2mv - c'mv - 2\varpi + \varpi');$$

on aura par le n°. 15,

$$C'^{(2)}_{1}=\frac{\left\{\begin{array}{l}\frac{21.m^2.(10+19.m+8.m^2)+120.m^2.A_1^{(8)}}{16.(2c-2+3m)}-\frac{21.m^2.(2+3m)}{4.(2-3m-c)}-\frac{63.m^2}{16.(2-3m)}\\ -2A'^{(2)}_{1}+3A_1^{(7)}-3A_2^{(4)}+3A_1^{(8)}.A_1^{(1)}\end{array}\right\}}{2c-2+3m};$$

$$C'^{(3)}_{1}=\frac{\left\{\begin{array}{l}\frac{-3.m^2.(10+19.m+8.m^2)+120.m^2.A_1^{(9)}}{16.(2c-2+m)}+\frac{3.m^2.(2+m)}{4.(2-m-c)}+\frac{9.m^2}{16.(2-m)}\\ -2A'^{(3)}_{1}+3A_1^{(6)}-3A_2^{(3)}+3A_1^{(9)}.A_1^{(1)}\end{array}\right\}}{2c-2+m}.$$

En réduisant ces formules en nombres, on trouve

$$A'^{(2)}_{1}=0{,}744932;$$
$$A'^{(3)}_{1}=-0{,}0153320;$$
$$C'^{(2)}_{1}=0{,}563137;$$
$$C'^{(3)}_{1}=-0{,}0235572;$$

d'où résultent dans $nt+\varepsilon$, les deux inégalités

$$18'',15.\sin.(2cv-2v+2mv+c'mv-2\varpi-\varpi')$$
$$-0'',76.\sin.(2cv-2v+2mv-c'mv-2\varpi+\varpi').$$

Les inégalités dépendantes des argumens $2cv\pm c'mv-2\varpi\mp\varpi'$ sont très-faciles à déterminer par la considération de l'expression de dt du n°. 15. Cette expression donne dans celle de $nt+\varepsilon$, les inégalités

$$\frac{3A_1^{(8)}.e^2e'}{2c+m}.\sin.(2cv+c'mv-2\varpi-\varpi')$$
$$+\frac{3A_1^{(9)}.e^2e'}{2c-m}.\sin.(2cv-c'mv-2\varpi+\varpi');$$

et il est aisé de voir que ce sont les seuls termes du quatrième ordre, qui dépendent de ces argumens. En les réduisant en nombres, on a dans $nt+\varepsilon$, les deux inégalités suivantes,

$$-9'',75.\sin.(2cv+c'mv-2\varpi-\varpi')$$
$$+13'',89.\sin.(2cv-c'mv-2\varpi+\varpi').$$

Il est facile de voir, par l'expression de dt du n°. 15, que l'inégalité dépendante de l'argument $4v-4mv-cv+\varpi$, doit être sensible. Pour la déterminer, nommons

$$A'^{(4)}_{3}.e.\cos.(4v-4mv-cv+\varpi)$$

le

le terme correspondant de $a\delta u$. Il est clair qu'il ne peut en résulter de semblables, dans l'équation différentielle en u, que par la variation des termes de la seconde des équations (L) du n°. 1, dus à la force perturbatrice. Nous avons développé ces variations dans le n°. 8. La première est $-\frac{3m'.u'^3.\delta u}{2h^2.u^4}$; et elle ne produit aucun terme du quatrième ordre, dépendant de cos. $(4v-4mv-cv+\varpi)$. La seconde variation est

$$-\frac{9m'.u'^3}{2h^2u^4}.\delta u.\cos.(2v-2v')+\frac{3m'.u'^3}{h^2u^3}.\delta v'.\sin.(2v-2v');$$

elle produit le terme

$$-\frac{3.\overline{m}^2}{4a_{,}}.(3-4m).A_{1}^{(1)}.e.\cos.(4v-4mv-cv+\varpi).$$

La troisième variation est

$$\frac{6m'.u'^3}{h^2u^4}.\frac{\delta u}{u}.\frac{du}{dv}.\sin.(2v-2v')-\frac{3m'.u'^3}{2h^2u^4}.\frac{d.\delta u}{dv}.\sin.(2v-2v')$$
$$+\frac{3m'.u'^3.\delta v'}{h^2u^4}.\frac{du}{dv}.\cos.(2v-2v');$$

elle produit le terme

$$-\frac{3.\overline{m}^2}{4a_{,}}.(2-2m-c).A_{1}^{(1)}.e.\cos.(4v-4mv-cv+\varpi).$$

Enfin la quatrième variation est,

$$\frac{12.m'}{h^2.a}.\left\{1+\tfrac{3}{4}\gamma^2.\cos.(2gv-2\theta)\right\}.\int\frac{u'^3.dv}{u^4}.\left\{\frac{\delta u}{u}.\sin.(2v-2v')+\tfrac{1}{2}.\delta v'.\cos.(2v-2v')\right\}$$
$$-\left\{\frac{dd\delta u}{dv^2}+\delta u\right\}\int\frac{3m'.u'^3.dv}{h^2u^4}.\sin.(2v-2v')-\frac{9m'}{h^2a}.\int\frac{u'^2.\delta u'}{u^4}.dv.\sin.(2v-2v');$$

elle produit le terme

$$-\frac{3.\overline{m}^2}{a_{,}}.\frac{(2-5m)}{4-4m-c}.A_{1}^{(1)}.e.\cos.(4v-4mv-cv+\varpi).$$

L'équation différentielle en u, deviendra donc, en n'ayant égard qu'à ces différens termes,

$$0=\frac{ddu}{dv^2}+u-\frac{3.\overline{m}^2}{4a_{,}}.\left\{5-6m-c+\frac{4.(2-5m)}{4-4m-c}\right\}.A_{1}^{(1)}.e.\cos.(4v-4mv-cv+\varpi).$$

En y substituant

$$A'^{(4)}_3 \cdot e \cdot \cos.(4v - 4mv - cv + \varpi)$$

pour $a\delta u$; on aura

$$A'^{(4)}_3 = \frac{-\frac{3m^2}{4}\cdot\left\{5 - 6m - c + \frac{4\cdot(2-5m)}{4-4m-c}\right\}\cdot A^{(1)}_1}{(4-4m-c)^2 - 1}.$$

Si l'on nomme ensuite

$$C'^{(4)}_3 \cdot e \cdot \sin.(4v - 4mv - cv + \varpi)$$

le terme correspondant de $nt+\varepsilon$; on aura par le n°. 15,

$$C'^{(4)}_3 = \frac{\left\{\frac{3m^2}{4\cdot(1-m)} + \frac{3m^2\cdot(1-m)}{4-4m-c} + 3A^{(0)}_2\right\}\cdot A^{(1)}_1 - 2A'^{(4)}_3}{4-4m-c}.$$

En réduisant ces formules en nombres, on trouve

$$A'^{(4)}_3 = -0{,}000799351;$$
$$C'^{(4)}_3 = 0{,}00294934;$$

d'où résulte dans l'expression de $nt+\varepsilon$, l'inégalité

$$103'',01 \cdot \sin.(4v - 4mv - cv + \varpi).$$

L'inégalité dépendante de $4v - 4mv - 2cv + 2\varpi$, peut encore être sensible : l'expression de ndt du n°. 15, contient le terme

$$\tfrac{3}{2}\cdot(A^{(1)}_1)^2 \cdot e^2 \cdot dv \cdot \cos.(4v - 4mv - 2cv + 2\varpi);$$

d'où résulte dans $nt+\varepsilon$, le terme

$$\frac{3\cdot(A^{(1)}_1)^2 \cdot e^2 \cdot \sin.(4v - 4mv - 2cv + 2\varpi)}{2\cdot(4-4m-2c)}.$$

Il est aisé de voir que c'est le seul terme du quatrième ordre, dépendant du même argument, qui entre dans l'expression de $nt+\varepsilon$. En le réduisant en secondes, il devient

$$68'',70 \cdot \sin.(4v - 4mv - 2cv + 2\varpi).$$

On verra ci-après, que les tables de Mason et de Burg s'accordent à ne donner que 46″ environ, pour le coëfficient de cette inégalité; ce qui semble indiquer que ce coëfficient est bien déterminé par les observations. Ainsi, la différence 22″ qui existe entre leur résultat et celui de notre analyse, vient en grande partie des quantités du cinquième ordre, que nous avons négligées dans le calcul.

Pour le prouver, et faire voir en même temps qu'une plus grande approximation diminue les différences entre la théorie et les observations; nous allons déterminer ce coëfficient, en ayant égard aux quantités du cinquième ordre.

Désignons par

$$A'^{(5)}_3 . e^2 . \cos . (4v - 4mv - 2cv + 2\varpi),$$

le terme correspondant de $a\delta u$; il est clair qu'il ne peut en résulter de semblables dans l'équation différentielle en u, que par la variation des termes de la seconde des équations (L) du n°. 1, dus à la force perturbatrice. Nous venons de donner les quatre variations de ces termes : la première ne produit aucun terme du cinquième ordre, dépendant de cos. $(4v - 4mv - 2cv + 2\varpi)$. La seconde variation produit le terme

$$\frac{9.\overline{m}^2}{4a_{,}} . \{2A_{,}^{(1)} - A_{,}^{(11)}\} . e^2 . \cos . (4v - 4mv - 2cv + 2\varpi).$$

Les termes du cinquième ordre, dépendans de cos. $(4v - 4mv - 2cv + 2\varpi)$, et produits par la troisième variation, se détruisent mutuellement, aux quantités près du sixième ordre. Enfin, la quatrième variation produit le terme

$$\frac{3.\overline{m}^2}{2a_{,}} . \left\{ \frac{5A_{,}^{(1)} - 2A_{,}^{(11)}}{2 - 2m - c} + \frac{(1-2m).(3-2m).(10+19.m+8m^2)}{4.(2c - 2 + 2m)} . A_2^{(0)} + \frac{A_{,}^{(11)}}{2-2m} \right\} . e^2 . \cos . \begin{pmatrix} 4v - 4mv \\ -2cv + 2\varpi \end{pmatrix}.$$

L'équation différentielle en u, devient donc, en n'ayant égard qu'à ces termes,

$$0 = \frac{ddu}{dv^2} + u + \frac{3.\overline{m}^2}{2a_{,}} . \left\{ \begin{matrix} 3A_{,}^{(1)} - \frac{3}{2} . A_{,}^{(11)} + \dfrac{5A_{,}^{(1)} - 2A_{,}^{(11)}}{2 - 2m - c} + \dfrac{A_{,}^{(11)}}{2 - 2m} \\ + \dfrac{(1-2m).(3-2m).(10+19.m+8m^2)}{4.(2c - 2 + 2m)} . A_2^{(0)} \end{matrix} \right\} . e^2 . \cos . \begin{pmatrix} 4v - 4mv \\ -2cv + 2\varpi \end{pmatrix}.$$

En substituant $A'^{(5)}_3 . e^2 . \cos . (4v - 4mv - 2cv + 2\varpi)$ pour $a\delta u$; on aura

$$A'^{(5)}_3 = \frac{3m^2}{2} . \frac{\left\{ \begin{matrix} 3A_{,}^{(1)} - \frac{3}{2} . A_{,}^{(11)} + \dfrac{5A_{,}^{(1)} - 2A_{,}^{(11)}}{2 - 2m - c} + \dfrac{A_{,}^{(11)}}{2 - 2m} \\ + \dfrac{(1-2m).(3-2m).(10+19.m+8m^2)}{4.(2c - 2 + 2m)} . A_2^{(0)} \end{matrix} \right\}}{(4 - 4m - 2c)^2 - 1}.$$

Si l'on désigne ensuite par

$$C'^{(5)}_{2}.e^2.\sin.(4v-4mv-2cv+2\varpi)$$

le terme correspondant de $nt+\varepsilon$; on aura par le n°. 15,

$$C'^{(5)}_{2}=\frac{\left\{\begin{array}{l}\frac{-3m^2.(5A^{(1)}_{1}-2A^{(11)}_{1})}{4.(2-2m-c)}-\frac{27.m^4}{64.(1-m)}.\frac{(10+19.m+8m^2)}{2c-2+2m}-2A'^{(5)}_{3}\\ +3A'^{(4)}_{3}+\frac{3m^2}{4.(1-m)}.A^{(11)}_{1}-\frac{3m^2.A^{(1)}_{1}}{2-2m-c}-\frac{3m^2.(10+19m+8m^2)}{8.(2c-2+2m)}.A^{(0)}_{2}\\ +\frac{3}{2}.(A^{(1)}_{1})^2+3A^{(0)}_{2}.A^{(11)}_{1}-6A^{(1)}_{1}.A^{(0)}_{2}\end{array}\right\}}{4-4m-2c}.$$

En réduisant ces formules en nombres, on trouve

$$A'^{(5)}_{3}=0{,}00436374;$$
$$C'^{(5)}_{2}=0{,}0249067;$$

ce qui donne dans $nt+\varepsilon$, l'inégalité

$$47'',71.\sin.(4v-4mv-2cv+2\varpi).$$

La différence entre ce résultat et celui des tables, est insensible; et l'on voit par ce calcul, que pour rapprocher entièrement la théorie de l'observation à l'égard de toutes les inégalités lunaires, il suffiroit de porter l'approximation jusqu'aux quantités du cinquième ordre. Cela résulte encore du calcul de l'inégalité dépendante de $\sin.(v-mv)$, dans lequel nous avons eu égard aux quantités de cet ordre; car on verra dans la suite, que le résultat de notre analyse, comparé à celui des observations, donne à très-peu-près, la parallaxe du soleil, que l'on a conclue des passages de Vénus sur cet astre.

L'inégalité dépendante de l'argument $cv-v+mv-\varpi$, peut être sensible, à cause de la petitesse du coëfficient de v dans cet argument. Pour la déterminer, désignons par

$$A'^{(6)}_{1}.\frac{a}{a'}.e.\cos.(cv-v+mv-\varpi);$$

$$C'^{(6)}_{1}.\frac{a}{a'}.e.\sin.(cv-v+mv-\varpi);$$

les parties de $a\delta u$ et de $nt+\varepsilon$ qui dépendent de cet argument; on aura, en ayant égard aux perturbations de la terre par la lune,

$$A'^{(6)}_{1} = \frac{-3m^2.\left\{\frac{21-11c-7m-20.\mu}{16} - 5A_1^{(17)} - \frac{5}{8}.A_1^{(1)}\right\}}{(c+m-1).\left\{1-(c+m-1)^2-\frac{3}{2}m^2\right\}};$$

$$C'^{(6)}_{1} = \frac{\frac{-\frac{3m^2}{2}.\left\{\frac{5+2m-10.\mu}{8} - 5A_1^{(17)} - \frac{5}{8}.A_1^{(1)}\right\}}{c+m-1} - 2A'^{(6)}_{1} + 3A_1^{(17)} + 3A_1^{(1)}.A_1^{(17)} + \frac{3m^2}{8.(1-m)}}{c+m-1}.$$

D'où l'on tire

$$A'^{(6)}_{1} = -0{,}260496;$$
$$C'^{(6)}_{1} = -0{,}293763.$$

De-là résulte dans $nt+\varepsilon$, l'inégalité

$$-25'',65.(1+i).\sin.(cv-v+mv-\varpi).$$

L'inégalité dépendante de l'argument $v-mv+cv-\varpi$, est facile à déterminer par le n°. 15 ; il est aisé de voir qu'elle est égale à

$$\frac{3A_1^{(17)}}{1+c-m}.\frac{a}{a'}.e.\sin.(v-mv+cv-\varpi);$$

et par conséquent égale à

$$-15'',47.(1+i).\sin.(v-mv+cv-\varpi).$$

En suivant les mêmes procédés, on déterminera les autres inégalités du quatrième ordre; mais comme elles sont au-dessous des erreurs de nos approximations, il ne sera utile de les considérer par la théorie, que lorsqu'on voudra porter l'approximation jusqu'aux quantités du cinquième ordre.

Maintenant, si l'on rassemble les inégalités du quatrième ordre que nous venons de déterminer, on aura

$$\begin{aligned}
&+26'',77.\sin.(2v-2mv-2gv+cv+2\theta-\varpi)\\
&-25'',03.\sin.(2cv+2v-2mv-2\varpi)\\
&+31'',39\ \sin.(2v-2mv+cv-c'mv-\varpi+\varpi')\\
&+18'',15.\sin.(2cv-2v+2mv+c'mv-2\varpi-\varpi')\\
&-0'',76.\sin.(2cv-2v+2mv-c'mv-2\varpi+\varpi')\\
&-9'',75.\sin.(2cv+c'mv-2\varpi-\varpi')\\
&+13'',89.\sin.(2cv-c'mv-2\varpi+\varpi')
\end{aligned}$$

$$+\ 103'',01.\sin.(4v - 4mv - cv + \varpi)$$
$$+\ 47'',71.\sin.(4v - 4mv - 2cv + 2\varpi)$$
$$-\ 25'',65.(1+i).\sin.(cv - v + mv - \varpi)$$
$$-\ 15'',47.(1+i).\sin.(v - mv + cv - \varpi).$$

18. Considérons le mouvement de la lune, en latitude. Nous avons déterminé précédemment la tangente s de sa latitude ; or l'expression de l'arc par la tangente s, est $s - \frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{5}.s^5 -$ &c. ; ainsi la latitude de la lune est à très-peu-près,

$$\gamma.(1 - \tfrac{1}{4}\gamma^2).\sin.(gv - \theta) + \delta s.\{1 - \tfrac{1}{2}\gamma^2 + \tfrac{1}{2}.\gamma^2.\cos.(2gv - 2\theta)\} + \tfrac{1}{12}.\gamma^3.\sin.(3gv - 3\theta);$$

d'où j'ai conclu, en employant la valeur précédente de γ, la latitude égale à

$$57230'',83.\sin.(gv - \theta)$$
$$+\ 38'',78.\sin.(3gv - 3\theta)$$
$$+\ 1621'',09.\sin.(2v - 2mv - gv + \theta)$$
$$+\ 3'',52.\sin.(2v - 2mv + gv - \theta)$$
$$-\ 17'',26.\sin.(gv + cv - \theta - \varpi)$$
$$+\ 61'',27.\sin.(gv - cv - \theta + \varpi)$$
$$+\ 19'',95.\sin.(2v - 2mv - gv + cv + \theta - \varpi)$$
$$-\ 4'',28.\sin.(2v - 2mv + gv - cv - \theta + \varpi)$$
$$-\ 66'',66.\sin.(2v - 2mv - gv - cv + \theta + \varpi)$$
$$+\ 75'',14.\sin.(gv + c'mv - \theta - \varpi')$$
$$-\ 80'',06.\sin.(gv - c'mv - \theta + \varpi')$$
$$-\ 31'',47.\sin.(2v - 2mv - gv + c'mv + \theta - \varpi')$$
$$+\ 69'',19.\sin.(2v - 2mv - gv - c'mv + \theta + \varpi')$$
$$+\ 84'',57.\sin.(2cv - gv - 2\varpi + \theta)$$
$$+\ 15'',83.\sin.(2cv + gv - 2v + 2mv - 2\varpi - \theta).$$

19. Il nous reste à déterminer la troisième coordonnée de la lune, ou sa parallaxe. Le sinus de la parallaxe horizontale de la lune, est égal à $\frac{D}{r}$ ou à $\frac{D.u}{\sqrt{1+ss}}$, D étant le rayon terrestre. Vu la petitesse de cette quantité, on peut la prendre pour l'expression

de la parallaxe elle-même. En y substituant pour u, sa valeur

$$\frac{1}{a}\cdot\{1+e^2+\tfrac{1}{4}\gamma^2+e.(1+e^2).\cos.(cv-\varpi)-\tfrac{1}{4}\gamma^2.\cos.(2gv-2\theta)\}+\delta u\,;$$

et négligeant les termes de l'ordre $\frac{D}{a}.e^4$; on aura la parallaxe égale à

$$\frac{D}{a}.(1+e^2).\{1+e.[1-\tfrac{1}{4}\gamma^2+\tfrac{1}{4}\gamma^2.\cos.(2gv-2\theta)].\cos.(cv-\varpi)+a\delta u-s\delta s\}.$$

Pour déterminer $\frac{D}{a}$, nous observerons que l'on a par le n°. 10,

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{a_{,}}.0{,}9973020\,;$$

et par le n°. 15,

$$\frac{a^2}{\sqrt{a_{,}}}=1{,}0003084=\frac{1}{n};$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{a}=\sqrt[3]{\frac{n^2.(1{,}0003084)^2}{0{,}9973020}}.$$

Soit 2ϵ le double de l'espace que l'attraction terrestre feroit décrire dans le temps t, sur le parallèle dont le carré du sinus de latitude est $\frac{1}{3}$. Cette attraction est $\frac{M}{D^2}$ par le n°. 35 du livre III, la terre M étant supposée elliptique. Mais on a fait précédemment $M+m=1$, m étant ici la masse de la lune; on a donc

$$\frac{M.t^2}{(M+m).D^2}=2\epsilon\,;$$

partant

$$\frac{D}{a}=\sqrt[3]{\frac{M}{M+m}.\frac{D}{2\epsilon}.\frac{n^2t^2.(1{,}0003084)^2}{0{,}9973020}}.$$

Supposons t égal à une seconde, et nommons T le nombre des secondes d'une révolution sydérale de la lune; on aura $n^2=\frac{4\pi^2}{T^2}$, π étant le rapport de la demi-circonférence au rayon. Soit l la longueur du pendule à secondes, due à la gravité sur le parallèle

que nous considérons; on aura par le n°. 15 du premier livre, $2\varepsilon = \pi^2 l$; ce qui donne

$$\frac{D}{a} = \sqrt[3]{\frac{M}{M+m} \cdot \frac{D}{l} \cdot \frac{(2{,}0006168)^2}{0{,}9973020 \cdot T^2}}.$$

La longueur du pendule à secondes, sur le même parallèle, est, par le n°. 42 du troisième livre, égale à $0^{\text{mètres}},740905$; il faut l'augmenter de sa $434^{\text{ième}}$ partie, pour avoir la longueur qui auroit lieu sans la force centrifuge; ce qui donne $l = 0^{\text{me}},742612$. La valeur de D est égale à 6369374 mètres; enfin, on a par les phénomènes des marées, $m = \frac{M}{58{,}6}$, et les observations donnent $T = 2732166$; on aura ainsi,

$$\frac{D}{a} = 0{,}01655101.$$

En évaluant en secondes, le coëfficient $\frac{D}{a} \cdot (1+e^2)$; on le trouve égal à $10568'',41$. Cela posé, on trouve pour l'expression de la parallaxe de la lune, sur le parallèle dont il s'agit,

$$
\begin{aligned}
& 10568'',41 \\
+\ & 578'',63 \cdot \cos.(cv - \varpi) \\
+\ & 76'',18 \cdot \cos.(2v - 2mv) \\
+\ & 117'',49 \cdot \cos.(2v - 2mv - cv + \varpi) \\
-\ & 2'',16 \cdot \cos.(2v - 2mv + cv - \varpi) \\
-\ & 0'',53 \cdot \cos.(2v - 2mv + c'mv - \varpi') \\
+\ & 5'',06 \cdot \cos.(2v - 2mv - c'mv + \varpi') \\
-\ & 1'',03 \cdot \cos.(c'mv - \varpi') \\
-\ & 0'',68 \cdot \cos.(2v - 2mv - cv + c'mv + \varpi - \varpi') \\
+\ & 5'',04 \cdot \cos.(2v - 2mv - cv - c'mv + \varpi + \varpi') \\
-\ & 2'',02 \cdot \cos.(cv + c'mv - \varpi - \varpi') \\
+\ & 2'',67 \cdot \cos.(cv - c'mv - \varpi + \varpi') \\
+\ & 0'',03 \cdot \cos.(2cv - 2\varpi) \\
+\ & 11'',10 \cdot \cos.(2cv - 2v + 2mv - 2\varpi) \\
+\ & 0'',23 \cdot \cos.(2gv - 2\theta) \\
-\ & 0'',54 \cdot \cos.(2gv - 2v + 2mv - 2\theta) \\
-\ & 0'',04 \cdot \cos.(2c'mv - 2\varpi')
\end{aligned}
$$

—

$- 2'',92 . \cos. (2gv - cv - 2\theta + \varpi)$
$- 0'',20 . \cos. (2v - 2mv - 2gv + cv + 2\theta - \varpi)$
$- 2'',99 . (1 + i) . \cos. (v - mv)$
$+ 0'',48 . (1 + i) . \cos. (v - mv + c'mv - \varpi')$
$- 0'',13 . \cos. (2v - 2mv + cv - c'mv - \varpi + \varpi')$
$- 0'',46 . \cos. (4v - 4mv - cv + \varpi)$
$+ 0'',14 . \cos. (4v - 4mv - 2cv + 2\varpi)$
$+ 0'',40 . \cos. (2cv - 2v + 2mv + c'mv - 2\varpi - \varpi')$
$+ 0'',07 . \cos. (2cv + 2v - 2mv - 2\varpi)$
$- 0'',38 . (1 + i) . \cos. (cv - v + mv - \varpi)$.

CHAPITRE II.

Des inégalités lunaires dues à la non-sphéricité de la terre et de la lune.

29. Nous allons présentement considérer les termes dus à la non-sphéricité de la terre et de la lune. On a vu dans le n°. 1, que pour y avoir égard, il suffit d'augmenter dans l'expression de Q, la quantité $\frac{M+m}{r}$, de

$$(M+m).\left\{\frac{\delta V}{M}+\frac{\delta V'}{m}\right\}.$$

Si l'on nomme $\alpha\rho$ l'ellipticité de la terre; D son rayon moyen; $\alpha\varphi$ le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur; enfin μ le sinus de la déclinaison de la lune; on a par le n°. 35 du livre III,

$$V=\frac{M}{r}+\{\tfrac{1}{2}\alpha\varphi-\alpha\rho\}.\frac{D^2}{r^3}.M.(\mu^2-\tfrac{1}{3}).$$

Si la terre n'est pas elliptique, on a par le n°. 32 du livre III,

$$V=\frac{M}{r}+\{(\tfrac{1}{2}\alpha\varphi-\alpha\rho).(\mu^2-\tfrac{1}{3})+\alpha h'.(1-\mu^2).\cos.2\varpi\}.M.\frac{D^2}{r^3};$$

$\alpha\rho$ et $\alpha h'$ étant des constantes dépendantes de la figure du sphéroïde terrestre, et ϖ étant l'angle formé par l'un des deux axes principaux de la terre situés dans le plan de l'équateur, avec le méridien terrestre passant par le centre de la lune. Il est facile de voir par l'analyse suivante, que le terme dépendant de $\cos.2\varpi$, n'a aucune influence sensible sur le mouvement lunaire, à cause de la rapidité avec laquelle l'angle ϖ varie; en sorte que la valeur de V dont on doit ici faire usage, est la même que dans l'hypothèse elliptique et d'une ellipticité égale à $\alpha\rho$; mais dans le cas général d'un sphéroïde quelconque, $\alpha\rho$ n'exprime plus son applatissement. On peut donc supposer dans ce cas général, que la

valeur de Q du n°. 1, s'accroît par la considération de la non-sphéricité de la terre, de la fonction

$$\left(\tfrac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha\rho\right).\frac{D^2}{r^3}.\left(\mu^2 - \tfrac{1}{3}\right);$$

$M+m$ étant pris pour l'unité de masse.

Considérons d'abord la variation de l'orbite, ou le mouvement de la lune en latitude, dépendant de cette cause. Si l'on nomme λ l'obliquité de l'écliptique sur l'équateur, et si l'on fixe l'origine de l'angle v, à l'équinoxe du printemps d'une époque donnée; on aura à très-peu-près,

$$\mu = \sin.\lambda.\sqrt{1-ss}.\sin.fv + s.\cos.\lambda;$$

fv étant la longitude vraie de la lune, rapportée à l'équinoxe mobile du printemps. Il faut ainsi ajouter à la valeur de Q, la fonction

$$\left(\tfrac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha\rho\right).\frac{D^2}{r^3}.\left\{\begin{array}{l}\sin.^2\lambda.(1-s^2).\sin.^2.fv + 2s.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\sin.fv\\ +s^2.\cos.^2\lambda - \tfrac{1}{3}\end{array}\right\}.$$

Cela posé, reprenons la troisième des équations (L) du n°. 1. Nous avons développé dans les n°s. 11, 12 et 13, les divers termes de cette équation dus à l'action du soleil : il est facile de voir que la fonction précédente lui ajoute la quantité

$$\frac{2.\left(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi\right)}{h^2}.D^2u.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\sin.fv + (g^2-1).H.\sin.fv;$$

$H.\sin.fv$ désignant l'inégalité de s, dépendante de $\sin.fv$. On peut d'ailleurs se convaincre aisément que cette quantité est la seule sensible qui résulte de cette fonction. En l'ajoutant à l'équation différentielle du n°. 13, et observant que $f-1$ est extrêmement petit par rapport à $g-1$; l'intégration donnera

$$H = \frac{2.\left(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi\right)}{1-g^2}.\frac{D^2}{a^2}.\sin.\lambda.\cos.\lambda;$$

d'où résulte dans s, ou dans le mouvement de la lune en latitude, l'inégalité

$$-\frac{\left(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi\right)}{g-1}.\frac{D^2}{a^2}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\sin.fv.$$

C'est la seule inégalité sensible du mouvement lunaire en latitude,

due à la non-sphéricité de la terre. Cette inégalité revient évidemment à supposer que l'orbite de la lune, au lieu de se mouvoir sur la plan de l'écliptique, avec une inclinaison constante, se meut avec la même condition, sur un plan passant constamment par les équinoxes, entre l'équateur et l'écliptique, et incliné à ce dernier plan, d'un angle égal à

$$\frac{(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi)}{g-1}\cdot\frac{D^2}{a^2}\cdot\sin.\lambda.\cos.\lambda.$$

Nous avons trouvé précédemment

$$\frac{D}{a} = 0{,}01655101\ ; \qquad g-1 = 0{,}00402175;$$

on avoit en 1750,

$$\lambda = 26^\circ{,}0796\ ;$$

enfin, $\alpha\varphi = \frac{1}{289}$; en supposant donc $\alpha\rho = \frac{1}{334}$; l'inégalité précédente devient

$$-20''{,}023.\sin.fv.$$

Elle seroit $-41''{,}470.\sin.fv$, si l'applatissement de la terre étoit $\frac{1}{230}$, comme dans le cas de l'homogénéité de cette planète; cette inégalité bien observée, est donc très-propre à faire connoître l'applatissement de la terre.

Considérons présentement les variations du rayon vecteur et de la longitude de la lune, dues à la non-sphéricité de la terre. Nous pouvons les déduire de la première et de la seconde des équations (L) du n°. 1; mais il est plus exact et plus simple de faire usage des formules du n°. 46 du second livre. Pour cela, nous supposerons que dans ce n°. 46, la caractéristique différentielle δ se rapporte à la quantité $\frac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha\rho$. Nous observerons ensuite, que la fonction R du même n°. est égale à ce que nous représentons ici par $-Q+\frac{1}{r}$, et que rR' est égal à $r.\left(\frac{dR}{dr}\right)$; ce qui change l'équation (S) du n°. cité, dans la suivante,

$$0 = \frac{d^2.r\delta r}{dt^2} + \frac{r\delta r}{r^3} + 2\int\delta.\mathrm{d}R + \delta.r.\left(\frac{dR}{dr}\right).$$

R contient le terme $2.(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi).\frac{D^2}{r^3}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.s.\sin.fv$; et par conséquent, celui-ci,

$$(\alpha\rho - \tfrac{1}{2}\alpha\varphi).\frac{D^2}{r^3}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\gamma.\cos.(gv - fv - \theta);$$

en supposant donc que δR représente ce terme, $\int\delta \mathrm{d}R$ sera égal à ce même terme ; car la caractéristique différentielle d se rapportant aux seules coordonnées de la lune ; on aura, en n'ayant égard qu'au terme précédent,

$$\int\delta.\mathrm{d}R = \delta R;$$

on aura ensuite,

$$\delta.r.\left(\frac{dR}{dr}\right) = -3.(\alpha\rho - \tfrac{1}{2}\alpha\varphi).\frac{D^2}{r^3}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\gamma.\cos.(gv - fv - \theta).$$

Si l'on substitue ces valeurs de $\int\delta.\mathrm{d}R$, et de $\delta.r.\left(\frac{dR}{dr}\right)$, dans l'équation différentielle précédente ; on verra que l'expression δr contient un terme dépendant de $\cos.(gv - fv + \theta)$, mais qui n'ayant point $g - 1$ pour diviseur, comme le terme correspondant de δs, est insensible.

Il n'en est pas de même de l'expression de la longitude. La formule (T) du n°. 46 du second livre, donne dans $d\delta v$, la fonction

$$\frac{3dt^2.\int\delta.\mathrm{d}R + 2dt^2.\delta.r.\left(\frac{dR}{dr}\right)}{r^2dv}.$$

En y substituant pour δR, le terme qu'il représente ; on aura dans $d.\delta v$, le terme

$$-\frac{3dt^2.(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi)}{r^2dv}.\frac{D^2}{r^3}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\gamma.\cos.(gv - fv - \theta).$$

Mais ce terme n'est pas le seul de ce genre, qui entre dans l'expression de $d.\delta v$. L'action du soleil donne par le n°. 3, dans Q, le terme $\frac{m'u'^3}{4u^2}.(1 - 2s^2)$. En y substituant pour u, $\frac{\sqrt{1+s^2}}{r}$; on aura dans R, le terme

$$-\frac{m'u'^3.r^2}{4}(1 - 3s^2);$$

ce qui donne dans δR, le terme

$$\frac{3m'u'^3.r^2}{2}.s\delta s.$$

et par conséquent, dans la fonction $3.\int\delta.dR + 2\delta.r.\left(\frac{dR}{dr}\right)$, le terme

$$\frac{21.m'.u'^3.r^2}{2}.s\delta s.$$

On a à très-peu-près, $m'u'^3.r^3 = m^2$, et par le n°. 13, g^2 est à fort peu près égal à $1+\frac{3}{2}m^2$, ce qui donne g égal à $1+\frac{3}{4}m^2$; le terme précédent devient ainsi,

$$\frac{14.(g-1).s\delta s}{r}.$$

En substituant pour δs, $-\frac{(\alpha\rho-\frac{1}{2}\alpha\phi)}{g-1}.\frac{D^2}{r^2}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\sin.fv$; et pour s, $\gamma.\sin.(gv-\theta)$; on aura le terme

$$-7.(\alpha\rho-\tfrac{1}{2}\alpha\varphi).\frac{D^2}{r^3}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\gamma.\cos.(gv-fv-\theta),$$

qui ajouté au terme que nous venons de trouver pour $3.\int\delta.dR + 2\delta.r.\left(\frac{dR}{dr}\right)$, donne dans $d\delta v$, le terme

$$-\frac{10.dt^2.(\alpha\rho-\frac{1}{2}\alpha\phi)}{r^2dv}.\frac{D^2}{r^3}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\gamma.\cos.(gv-fv-\theta).$$

On peut dans ce terme, substituer a pour r, et dv pour $n\,dt$; en observant ensuite que $n^2a^3 = 1$, il devient

$$-10.dv.(\alpha\rho-\tfrac{1}{2}\alpha\varphi).\frac{D^2}{a^2}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\gamma.\cos.(gv-fv-\theta).$$

Cette valeur de $d.\delta v$ est par le n°. 46 du second livre, relative à l'angle compris entre les deux rayons vecteurs consécutifs r et $r+dr$; or si l'on nomme $dv_,$ cet angle, dv représentant alors sa projection sur le plan de l'écliptique; on a par le n°. cité,

$$dv = dv_,.\frac{\sqrt{(1+s^2)^2-\frac{ds^2}{dv^2}}}{\sqrt{1+s^2}};$$

ou à très-peu-près,

$$dv = dv_{,}.\left\{1+\tfrac{1}{2}.s^2-\tfrac{1}{2}.\frac{ds^2}{dv^2}\right\}.$$

En substituant pour s,

$$\gamma.\sin.(gv-\theta)-\frac{(\alpha\rho-\frac{1}{2}.\alpha\phi)}{g-1}.\frac{D^2}{a^2}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\sin.fv;$$

on aura

$$dv = dv_{,}.\left\{1+\tfrac{1}{2}.(\alpha\rho-\tfrac{1}{2}.\alpha\varphi).\frac{D^2}{a^2}.\gamma.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\cos.(gv\text{-}fv\text{-}\theta)+\&c.\right\}.$$

On voit donc que pour avoir la valeur de $d.\delta v$, relative à l'angle v formé par la projection du rayon vecteur r sur l'écliptique, avec une droite fixe; il faut ajouter à l'expression précédente de $d.\delta v$, le terme

$$\tfrac{1}{2}dv.(\alpha\rho-\tfrac{1}{2}\alpha\varphi).\frac{D^2}{a^2}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\gamma.\cos.(gv-fv-\theta);$$

ce qui donne

$$d.\delta v = -\tfrac{19}{2}.dv.(\alpha\rho-\tfrac{1}{2}\alpha\varphi).\frac{D^2}{a^2}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\gamma.\cos.(gv-fv-\theta);$$

et en intégrant,

$$\delta v = -\tfrac{19}{2}.\frac{(\alpha\rho-\frac{1}{2}\alpha\phi)}{g-1}.\frac{D^2}{a^2}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\gamma.\sin.(gv-fv-\theta).$$

C'est la seule inégalité sensible du mouvement de la lune en longitude, due à la non-sphéricité de la terre. On doit observer que $fv-gv+\theta$, exprime la longitude du nœud ascendant de l'orbite, comptée de l'équinoxe mobile du printemps. Il suit de-là, que l'expression de la longitude vraie en fonction de la longitude moyenne, renferme l'inégalité

$$\tfrac{19}{2}.\frac{(\alpha\rho-\frac{1}{2}\alpha\phi)}{g-1}.\frac{D^2}{a^2}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\gamma.\sin.(\text{longitude du nœud ascendant}).$$

Le coëfficient de cette inégalité est $17'',135$, si $\rho=\frac{1}{334}$: il s'élève à $35'',490$, si $\rho=\frac{1}{230}$.

La non-sphéricité de la terre influe encore sur les mouvemens

du périgée et des nœuds de l'orbite lunaire. En effet, la valeur de Q étant par-là, augmentée de la quantité

$$(\alpha\rho - \tfrac{1}{2}\alpha\varphi).(1 - \tfrac{3}{2}s^2).\left\{\begin{matrix}\tfrac{1}{3} - (1 - s^2).\sin.^2\lambda.\sin.^2 fv \\ -2s.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\sin.fv - s^2.\cos.^2\lambda\end{matrix}\right\}.D^2.u^3;$$

il en résulte dans la seconde des équations (L) du n°. 1, le terme

$$-\frac{(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\phi).D^2u^2}{h^2}.(1 - \tfrac{3}{2}.\sin.^2\lambda).$$

En y substituant pour u, sa valeur approchée $\frac{1}{a}.\{1 + e.\cos.(cv - \varpi)\}$, et observant que h^2 est à très-peu-près égal à a; on aura dans l'équation différentielle (L') du n°. 9, les termes

$$-\frac{(\alpha\rho - \frac{1}{2}.\alpha\phi)}{a}.\frac{D^2}{a^2}.(1 - \tfrac{3}{2}.\sin.^2\lambda)$$
$$-\frac{2.(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\phi)}{a}.\frac{D^2}{a^2}.(1 - \tfrac{3}{2}.\sin.^2\lambda).e.\cos.(cv - \varpi);$$

d'où il est facile de conclure que le mouvement du périgée sera augmenté à très-peu-près, de la quantité

$$(\alpha\rho - \tfrac{1}{2}\alpha\varphi).\frac{D^2}{a^2}.v.\{1 - \tfrac{3}{2}.\sin.^2\lambda).$$

Il est aisé de voir, en considérant la troisième des équations (L) du n°. 1, que le mouvement rétrograde du nœud sera augmenté de la même quantité. En la réduisant en nombres, on trouve $0{,}00000026384.v$; ce qui est insensible.

Nous ferons ici une remarque intéressante sur l'inégalité précédente du mouvement de la lune en latitude. Cette inégalité n'est que la réaction de la nutation de l'axe terrestre, observée par Bradley. Pour le démontrer, nommons γ l'inclinaison de l'orbite lunaire, sur le plan dont nous avons parlé, et qui passant constamment par les équinoxes, est incliné à l'écliptique, d'un angle égal à $\frac{(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi)}{g-1}.\frac{D^2}{a^2}.\sin.\lambda.\cos.\lambda$. L'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique, sera

$$\gamma - \frac{(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi)}{g-1}.\frac{D^2}{a^2}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\cos.(gv - fv - \theta);$$

or l'aire décrite par la lune, autour du centre de gravité de la terre, est $\frac{1}{2}.r^2dv$: cette aire projetée sur l'écliptique, est diminuée dans

dans le rapport du cosinus de l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique, au rayon; elle est donc égale à

$$\tfrac{1}{2}.r^2dv.\cos.\left\{\gamma - \frac{(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\phi)}{g-1}.\frac{D^2}{a^2}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\cos.(gv - fv - \theta)\right\}.$$

Ainsi, l'expression de cette aire renferme l'inégalité

$$\tfrac{1}{2}.r^2dv.\frac{(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\phi)}{g-1}.\frac{D^2}{a^2}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\gamma.\cos(gv - fv - \theta);$$

et comme on a $r^2dv = a^2dt$, à fort peu près, en représentant par dt le moyen mouvement de la lune; cette inégalité est égale à

$$\tfrac{1}{2}.D^2dt.\frac{(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\phi)}{g-1}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\gamma.\cos.(gv - fv - \theta).$$

En la multipliant par la masse de la lune, que nous exprimerons ici par L, et en la divisant par dt; le double de ce quotient sera le moment de la force de la lune par rapport au centre de gravité de la terre, et due à la non-sphéricité de cette planète; ce qui donne pour ce moment,

$$L.D^2.\frac{(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\phi)}{g-1}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\gamma.\cos.(gv - fv - \theta).(i).$$

En vertu de l'égalité de l'action à la réaction, la même cause doit produire dans les molécules de la terre, un moment égal et contraire au précédent. Ce moment est indiqué par la nutation de l'axe terrestre: déterminons sa valeur, par les formules du n°. 6 du cinquième livre. On a vu dans le n°. cité, que si l'on représente par V, l'obliquité de l'écliptique à l'équateur; l'action de la lune sur la terre, produit en vertu de la non-sphéricité de cette planète, un accroissement dans cet angle, égal à

$$\frac{l'.\lambda}{(1+\lambda).(g-1)}.\gamma.\cos.(gv - fv - \theta);$$

l et λ étant les mêmes que dans le n°. cité. L'élément du mouvement de rotation de la terre, étant supposé ndt; la somme des momens des forces qui animent chaque molécule de la terre, multipliées par la masse de cette molécule, est égale à nC, C étant le moment d'inertie de la terre, par rapport à son axe de rotation.

Pour rapporter ce moment à l'écliptique, il faut le multiplier par le cosinus de son obliquité, ou par

$$\cos.\left\{V+\frac{l.\lambda}{(1+\lambda).(g-1)}.\gamma.\cos.(gv-fv-\theta)\right\};$$

on aura donc dans ce moment, l'inégalité

$$-\frac{l.\lambda.nC.\sin.V}{(1+\lambda).(g-1)}.\gamma.\cos.(gv-fv-\theta).$$

On a vu dans le n°. 6 du cinquième livre, que

$$l=\frac{3m^2}{4n}.\frac{(2C-A-B)}{C}.(1+\lambda).\cos.V;$$

mt exprimant le moyen mouvement de la terre. De plus, par le n°. 5 du même livre, $m^2.\lambda=\frac{L}{a^3}$, a étant la moyenne distance de la lune à la terre; et puisque nous représentons par t, le moyen mouvement de la lune, et par M, la masse de la terre; on a à fort peu près, $\frac{M}{a^3}=1$, ce qui donne $m^2.\lambda=\frac{L}{M}$; l'inégalité précédente devient ainsi,

$$-\frac{3L}{4M}.\frac{(2C-A-B)}{g-1}.\sin.V.\cos.V.\gamma.\cos.(gv-fv-\theta).$$

Par le n°. 2 du cinquième livre,

$$2C-A-B=\tfrac{16}{9}.\pi.(\alpha\rho-\tfrac{1}{2}\alpha\phi).D^2.\int\Pi.R^2.dR,$$

ρ étant l'applatissement de la terre, D son demi-diamètre, et R le rayon d'une de ses molécules, dont Π est la densité; enfin, π étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité. La masse M de la terre est $\frac{4}{3}.\pi.\int\Pi R^2.dR$; ce qui donne pour l'inégalité précédente, en y changeant V en λ qui dans la formule précédente (i), exprime l'obliquité de l'écliptique,

$$-L.D^2.\frac{(\alpha\rho-\frac{1}{2}\alpha\phi)}{g-1}.\sin.\lambda.\cos.\lambda.\gamma.\cos.(gv-fv-\theta).$$

Cette formule est la formule (i), prise avec un signe contraire; d'où il suit que l'inégalité précédente du mouvement de la lune en latitude, est la réaction de la nutation de l'axe terrestre; et il y auroit équilibre autour du centre de gravité de la terre, en vertu

des forces qui produisent ces deux inégalités, si toutes les molécules de la terre et de la lune étoient fixement liées entre elles; la lune compensant la petitesse des forces qui l'animent, par la longueur du levier auquel elle seroit attachée.

21. Pour avoir égard à la non-sphéricité de la lune; nous observerons que par le n°. 1, elle introduit dans Q, le terme $(M+m).\frac{\delta V'}{m}$, ou plus simplement, $\frac{\delta V'}{m}$; parce que nous supposons $M+m=1$. On a par le n°. 14 du troisième livre,

$$\delta V' = \frac{4\alpha\pi}{5r^3}.\int\rho.d\,(a^5.Y^{(2)})$$

l'intégrale étant prise depuis $a=0$, jusqu'à a égal au demi-diamètre de la lune, que nous désignerons par a; et ρ étant ici la densité des couches de la lune. On a de plus, $m=\frac{4}{3}.\pi.\int\rho.d.a^3$; on a donc

$$(M+m).\frac{\delta V'}{m} = \frac{3\alpha.\int\rho.d(a^5.Y^{(2)})}{5r^3.\int\rho.d.a^3}.$$

Pour déterminer $\int\rho.d.(a^5Y^{(2)})$, nous observerons que l'on a par le n°. 32 du troisième livre, pour $Y^{(2)}$, une expression de cette forme,

$$Y^{(2)} = h'.(\tfrac{1}{3}-\mu^2) + h''.\mu.\sqrt{1-\mu^2}.\sin.\varpi + h'''.\mu.\sqrt{1-\mu^2}.\cos.\varpi$$
$$+h^{\text{iv}}.(1-\mu^2).\sin.2\varpi + h^{\text{v}}.(1-\mu^2).\cos.2\varpi.$$

Ensuite les propriétés des axes de rotation, donnent par le n°. 32 du livre III,

$$0=\int\rho.d\,(a^5h'')\;;\quad 0=\int\rho.d\,(a^5h''')\;;\quad 0=\int\rho.d\,(a^5h^{\text{iv}});$$

et par le n°. 2 du livre V, on a

$$2C-A-B = \tfrac{16}{15}.\alpha\pi.\int\rho.d\,(a^5h')\;;$$
$$B-A = \tfrac{16}{15}.\alpha\pi.\int\rho.d\,(a^5h^{\text{v}}).$$

Ainsi l'on a

$$(M+m).\frac{\delta V'}{m} = \frac{9}{16.\pi}.\frac{1}{r^3.\int\rho.d.a^3}.\left\{\begin{array}{l}(2C-A-B).(\frac{1}{3}-\mu^2)\\ +(B-A).(1-\mu^2).\cos.2\varpi\end{array}\right\}.$$

On a à très-peu-près, par le n°. 2 du livre V,

$$C = \frac{8\pi}{15}.\int\rho.d.a^5\,;$$

partant,

$$(M+m).\frac{\delta V'}{m}=\frac{3}{10}.\frac{\int\rho.d.a^5}{\int\rho.d.a^3}.\frac{1}{r^3}.\left\{\begin{array}{l}\frac{(2C-A-B)}{C}.(\frac{1}{3}-\mu^2)\\ +\frac{(B-A)}{C}.(1-\mu^2).\cos.2\varpi\end{array}\right\}.$$

Dans cette dernière expression, ϖ est l'angle que le rayon mené du centre de la terre à celui de la lune, fait avec l'axe principal de ce satellite dirigé vers cette planète; μ est le sinus de la déclinaison de la terre vue de la lune, par rapport à l'équateur lunaire. Il est clair que l'angle v croissant de dv, l'angle ϖ croît de dv; on a donc $d.\cos.2\varpi=-2dv.\sin.2\varpi$, la caractéristique différentielle d se rapportant aux seules coordonnées de la lune; de plus, on a par le n°. 46 du second livre,

$$R=-Q+\frac{1}{r};$$

la partie de dR relative à la non-sphéricité de la lune, dans la formule (Y) du n°. 46 du second livre, est ainsi, en négligeant le carré de μ,

$$dR=\frac{3}{5r^3}.\frac{\int\rho.d.a^5}{\int\rho.d.a^3}.\frac{(B-A)}{C}.dv.\sin.2\varpi;$$

d'où résulte dans δv, ou dans la longitude vraie de la lune, par la formule (Y) du n°. 46 du second livre, le terme

$$\frac{9}{5}.\frac{\int\rho.d.a^5}{\int\rho.d.a^3}.\frac{1}{r^3}.\frac{(B-A)}{C}.\int\int dv^2.\sin.2\varpi.$$

L'angle ϖ est toujours très-petit, par le n°. 16 du livre V; en sorte que l'on peut supposer $\sin.2\varpi=2\varpi$. De plus, par ce même n°., ϖ contient un terme de la forme $-K.\sin.\left\{v.\sqrt{\frac{3.(B-A)}{C}}+F\right\}$.
Ce terme pris avec un signe contraire, représente par le n°. 15 du livre V, la libration réelle de la lune. Comme il croît avec beaucoup de lenteur, il semble pouvoir devenir sensible par la double intégration : c'est le seul de l'expression de ϖ, auquel il soit nécessaire d'avoir égard. Il produit dans δv, le terme

$$\frac{6}{5}.\frac{\int\rho.d.a^5}{\int\rho.d.a^3}.\frac{K}{r^4}.\sin.\left\{v.\sqrt{3.\frac{(B-A)}{C}}+F\right\}.$$

La libration $K.\sin.\left\{v.\sqrt{3.\frac{(B-A)}{C}+F}\right\}$ étant insensible, on ne peut pas supposer qu'elle s'élève à un degré. De plus, le coëfficient $\frac{6}{5}.\frac{1}{r^2}.\frac{\int\rho.d.a^5}{\int\rho.d.a^3}$ est extrêmement petit. Si la lune est homogène, il devient $\frac{6}{5}.\frac{a^2}{r^2}$; or $\frac{a}{r}$ est le sinus du demi-diamètre apparent de la lune; ainsi le produit de K par ce coëfficient, est entièrement insensible. Si la lune n'est pas homogène, sa densité croît de la surface au centre; alors ce coëfficient est moindre encore : d'où l'on doit conclure que l'inégalité précédente de la longitude de la lune est insensible, et que la non-sphéricité de ce satellite ne produit aucune variation sensible dans son mouvement en longitude.

Quant à sa latitude, on doit observer que μ étant le sinus de la déclinaison de la terre vue de la lune, par rapport à l'équateur lunaire, et le nœud ascendant de l'orbite lunaire coïncidant toujours avec le nœud descendant de son équateur; on a

$$\mu^2 = \{s+\lambda.\sin.(gv-\theta)\}^2,$$

λ étant ici l'inclinaison de l'équateur lunaire à l'écliptique; ce qui donne

$$\mu.\left(\frac{d\mu}{ds}\right) = s+\lambda.\sin.(gv-\theta) = \frac{(\lambda+\gamma)}{\gamma}.s;$$

la non-sphéricité de la lune ajoute donc à l'expression de $-\frac{1}{h^2.u^2}.\left(\frac{dQ}{ds}\right)$, dans la troisième des équations (L) du n°. 1, le terme

$$\frac{3}{5}.\frac{\int\rho.d.a^5}{\int\rho.d.a^3}.\frac{1}{r^2}.\frac{(\lambda+\gamma)}{\gamma}.s.\left\{\frac{2C-A-B}{C}+\frac{B-A}{C}.\cos.2\varpi\right\},$$

ou à cause de $\cos.2\varpi=1$, à très-peu-près, elle lui ajoute le terme

$$\frac{6}{5}.\frac{\int\rho.d.a^5}{\int\rho.d.a^3}.\frac{1}{r^2}.\frac{(\lambda+\gamma)}{\gamma}.\frac{(C-A)}{C}.s.$$

Il est facile de voir par le n°. 14, que ce terme ajoute au mouvement du nœud, la quantité

$$\frac{3}{5}.\frac{\int\rho.d.a^5}{\int\rho.d.a^3}.\frac{v}{r^2}.\frac{(\lambda+\gamma)}{\gamma}.\frac{(C-A)}{C}.$$

Par le n°. 18 du cinquième livre, $\frac{C-A}{C}=0{,}000599$; d'où il est facile de voir que la quantité précédente est insensible.

On trouve pareillement, que la non-sphéricité de la lune ajoute au terme $\frac{-s}{h^2.u}.\left(\frac{dQ}{du}\right)$, de la troisième des équations (L) du n°. 1; le terme

$$-\frac{3}{5}.\frac{\int\rho.d.a^5}{\int\rho.d.a^3}.\frac{1}{r^2}.\frac{(C-2A+B)}{C}.s\,;$$

ce qui ajoute au mouvement du nœud, le terme

$$-\frac{3}{10}.\frac{\int\rho.d.a^5}{\int\rho.d.a^3}.\frac{v}{r^2}.\frac{(C-2A+B)}{C}\,;$$

quantité entièrement insensible.

CHAPITRE III.

Des inégalités de la lune, dues à l'action des planètes.

22. Il nous reste à considérer l'action des planètes sur la lune. Si l'on nomme P la masse d'une planète ; X, Y, Z, ses coordonnées rapportées au centre de la terre ; f sa distance à ce centre ; il est visible par le n°. 1, que la valeur de Q sera augmentée par l'action de P, de la quantité

$$-\frac{P.(xX+yY+zZ)}{f^3}+\frac{P}{\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2}};$$

ou

$$\frac{P}{f}-\frac{\frac{1}{2}.P.r^2}{f^3}+\frac{3}{2}.P.\frac{(Xx+Yy+Zz)^2}{f^5}+\&c.$$

Soient X', Y', Z' les coordonnées de P, rapportées au centre du soleil, x', y', z' étant celles de la terre ; on aura

$$X=X'-x'; \quad Y=Y'-y'; \quad Z=Z'-z';$$

ce qui change la fonction précédente dans celle-ci,

$$\frac{P}{f}-\frac{\frac{1}{2}.P.r^2}{f^3}+\frac{3}{2}.P.\frac{(X'x+Y'y+Z'z-xx'-yy'-zz')^2}{f^5}+\&c.$$

Prenons pour plan fixe, celui de l'écliptique, ce qui rend z' nul ; et nommons R le rayon vecteur de la planète P, projeté sur ce plan ; U l'angle formé par cette projection, et par une droite fixe prise sur le même plan ; et S la tangente de la latitude héliocentrique de P. Nommons encore r' le rayon vecteur de la terre ; v' l'angle formé par ce rayon et par la droite fixe ; on aura

$$f=\sqrt{R^2.(1+SS)+r'^2-2Rr'.\cos.(U-v')}.$$

La partie de Q relative à l'action de P sur la lune, sera donc

$$\frac{P}{f}-\frac{\frac{1}{2}.P.(1+ss)}{u^2f^3}+\frac{3}{2}.P.\frac{\{R.\cos(v-U)-r'.\cos.(v-v')+RsS\}^2}{u^2.f^5}+\&c.;$$

ou en négligeant le carré de S,

$$\frac{P}{f}+\frac{P.(1-2s^2)}{4u^2.f^3}+3P.\frac{\{R^2.\cos.(2v-2U)+r'^2.\cos.(2v-2v')-2Rr'.\cos.(2v-U-v')\}}{4u^2f^5}$$

$$+3P.\frac{R.sS.\{R.\cos.(v-U)-r'.\cos.(v-U')\}}{u^2f^5}+\&c.$$

Le terme $\frac{P}{f}$ ne renfermant ni u, ni v, ni s; il n'entre point dans les équations (L) du n°. 1. Le terme $\frac{P}{4u^2f^3}$ donne par son développement, une fonction de la forme

$$\frac{P}{4u^2}.\{\tfrac{1}{2}A^{(0)}+A^{(1)}.\cos.(U-v')+A^{(2)}.\cos.2(U-2v')+\&c.\}.$$

Le terme $-\frac{1}{h^2}.\left(\frac{dQ}{du}\right)$ de la seconde des équations (L) du n°. 1, donne ainsi la fonction

$$\frac{P}{2h^2u^3}.\{\tfrac{1}{2}.A^{(0)}+A^{(1)}.\cos.(U-v')+A^{(2)}.\cos.2.(U-v')+\&c.\}$$

De-là il est facile de conclure, par les n°s. 9 et 10, qu'il en résulte dans l'expression de au, la fonction

$$-\tfrac{1}{2}P.a^3.\left\{\frac{A^{(1)}.\cos.(i-m).v}{1-\frac{3}{2}m^2-(i-m)^2}+\frac{A^{(2)}.\cos.2.(i-m).v}{1-\frac{3}{2}m^2-4.(i-m)^2}+\frac{A^{(3)}.\cos.3.(i-m).v}{1-\frac{3}{2}m^2-9.(i-m)^2}+\&c.\right\};$$

i étant le rapport du moyen mouvement de P à celui de la lune. De-là résulte par le n°. 15, dans ndt, la fonction

$$P.a^3.\left\{\frac{A^{(1)}.\cos.(i-m).v}{1-\frac{3}{2}m^2-(1-m)^2.v}+\frac{A^{(2)}.\cos.2.(i-m).v}{1-\frac{3}{2}m^2-4.(i-m)^2}+\frac{A^{(3)}.\cos.3.(i-m).v}{1-\frac{3}{2}m^2-9.(i-m)^2}+\&c.\right\};$$

et par conséquent dans $nt+\varepsilon$, la fonction

$$\frac{P.a^3}{i-m}.\left\{\frac{A^{(1)}.\sin.(i-m).v}{1-\frac{3}{2}m^2-(i-m)^2}+\frac{\frac{1}{2}.A^{(2)}.\sin.2.(i-m).v}{1-\frac{3}{2}m^2-4.(i-m)^2}+\frac{\frac{1}{3}.A^{(3)}.\sin.3.(i-m).v}{1-\frac{3}{2}m^2-9.(i-m)^2}+\&c.\right\}.$$

Or on a par ce qui précède, $\frac{m'a^3}{a'^3}=m^2$, m' étant la masse du soleil; la fonction précédente devient ainsi,

$$\frac{\frac{P}{m'}.m^2.a'^3}{i-m}.\left\{\frac{A^{(1)}.\sin.(i-m).v}{1-\frac{3}{2}m^2-(i-m)^2}+\frac{\frac{1}{2}.A^{(2)}.\sin.2.(i-m).v}{1-\frac{3}{2}m^2-4.(i-m)^2}+\frac{\frac{1}{3}.A^{(3)}.\sin.3.(i-m).v}{1-\frac{3}{2}m^2-9.(i-m)^2}+\&c.\right\};(A)$$

Dans

Dans le cas d'une planète inférieure à la terre; on a, en nommant α le rapport de la distance moyenne de la planète au soleil, à celle du soleil à la terre; et conservant les dénominations du chap. VI du sixième livre,

$$a'^3 \cdot A^{(1)} = b_{\frac{3}{2}}^{(1)}\,; \quad a'^3 \cdot A^{(2)} = b_{\frac{3}{2}}^{(2)}\,; \quad a'^3 \cdot A^{(3)} = b_{\frac{3}{2}}^{(3)}\,; \quad \&c.\,;$$

ce qui change la fonction (A) dans celle-ci,

$$\frac{\frac{P}{m'}.m^2}{i-m}\cdot\left\{\frac{b_{\frac{3}{2}}^{(1)}.\sin.(i-m).v}{1-\frac{3}{2}m^2-(i-m)^2}+\frac{\frac{1}{2}.b_{\frac{3}{2}}^{(2)}.\sin.2.(i-m).v}{1-\frac{3}{2}m^2-4.(i-m)^2}+\frac{\frac{1}{3}.b_{\frac{3}{2}}^{(3)}.\sin.3.(i-m)\,v}{1-\frac{3}{2}m^2-9.(i-m)^2}+\&c.\right\};(B)$$

dans laquelle on peut prendre pour $(i-m).v$, la longitude moyenne de la planète, moins celle de la terre.

Relativement à une planète supérieure, α exprime le rapport de la moyenne distance de la terre au soleil, à celle de la planète; ainsi l'on a

$$a'^3 \cdot A^{(1)} = \alpha^3 . b_{\frac{3}{2}}^{(1)}\,; \quad a'^3 \cdot A^{(2)} = \alpha^3 . b_{\frac{3}{2}}^{(2)}\,; \quad a'^3 \cdot A^{(3)} = \alpha^3 . b_{\frac{3}{2}}^{(3)}; \&c.\,;$$

ce qui change la fonction (A), dans celle-ci,

$$\frac{\frac{P}{m'}.m^2\,\alpha^3}{i-m}\cdot\left\{\frac{b_{\frac{3}{2}}^{(1)}.\sin.(i-m).v}{1-\frac{3}{2}.m^2-(i-m)^2}+\frac{\frac{1}{2}.b_{\frac{3}{2}}^{(2)}.\sin.2.(i-m).v}{1-\frac{3}{2}m^2-4.(i-m)^2}+\frac{\frac{1}{3}.b_{\frac{3}{2}}^{(3)}.\sin.3.(i-m).v}{1-\frac{3}{2}m^2-9\,(i-m)^2}+\&c.\right\}.(C)$$

Ce sont les seuls termes sensibles qui peuvent résulter de l'action directe de la planète P sur la lune.

Mais l'action du soleil sur la lune, peut rendre sensibles, dans le mouvement de ce satellite, les perturbations du rayon vecteur de l'orbe terrestre, dues à l'action de P sur la terre, et y produire des inégalités du même ordre, que celles que nous venons de considérer. Pour le faire voir, considérons le terme $\frac{m'u'^3}{2h^2.u^3}$ qui par le n°. 6, fait partie de la seconde des équations (L) du n°. 1. Soit $\frac{P}{m'}.K.\cos.(\mathfrak{c}'n''t - \mathfrak{c}n't + B)$, un terme quelconque de $\frac{\delta r'}{a'}$, résultant de l'action de P sur la terre, $n''t$ exprimant le moyen mouvement de P, et $n't$ étant celui de la terre; le terme correspondant

de $\frac{\delta u'}{u'}$ sera $-\frac{P}{m'}.K.\cos.(\varsigma' n''t - \varsigma n't + B)$; ainsi le terme $\frac{m'.u'^3}{2h^2u^3}$ produit le suivant,

$$-\frac{3P.u'^3}{2h^2u^3}.K.\cos.(\varsigma' n''t - \varsigma n't + B).$$

Si l'on ne considère que les inégalités de $\frac{\delta r'}{a'}$, indépendantes des excentricités des orbites, et qu'on les représente par la série

$$\frac{P}{m'}.\left\{\begin{array}{l} K^{(1)}.\cos.(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') + K^{(2)}.\cos.2.(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \\ + K^{(3)}.\cos.3.(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') + \&c. \end{array}\right\};$$

le terme $\frac{m'.u'^3}{2h^2u^3}$ produira dans le second membre de l'équation (L') du n°. 9, la fonction

$$-\frac{3m^2}{2a}.\frac{P}{m'}.\left\{\begin{array}{l} K^{(1)}.\cos.(i-m).v + K^{(2)}.\cos.2.(i-m).v \\ + K^{(3)}.\cos.3.(i-m).v + \&c. \end{array}\right\};$$

d'où résulte dans $a\delta u$, la fonction

$$\frac{3m^2}{2}.\frac{P}{m'}.\left\{\frac{K^{(1)}.\cos.(i-m).v}{1-\frac{3}{2}m^2-(i-m)^2} + \frac{K^{(2)}.\cos.2.(i-m).v}{1-\frac{3}{2}m^2-4.(i-m)^2} + \frac{K^{(3)}.\cos.3(i-m).v}{1-\frac{3}{2}m^2-9.(i-m)^2} + \&c.\right\};$$

et par conséquent par le n°. 15, dans $nt+\varepsilon$, la fonction

$$-\frac{3m^2}{i-m}.\frac{P}{m'}.\left\{\frac{K^{(1)}.\cos.(i-m).v}{1-\frac{3}{2}m^2-(i-m)^2} + \frac{\frac{1}{2}.K^{(2)}.\cos.2.(i-m)v}{1-\frac{3}{2}m^2-4.(i-m)^2} + \frac{\frac{1}{3}.K^{(3)}.\cos.3.(i-m).v}{1-\frac{3}{2}m^2-9.(i-m)^2} + \&c.\right\}; (D)$$

fonction du même ordre que celle qui résulte de l'action directe des planètes sur la lune. Nous allons déterminer ces diverses inégalités, pour Vénus, Mars et Jupiter.

Relativement à Vénus, on a par le n°. 23 du sixième livre,

$$\alpha = 0,72333230;$$
$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 9,992539;$$
$$b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 8,872894;$$
$$b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 7,386580;$$
$$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 5,953940;$$

d'où l'on tire par les formules du n°. 49 du second livre,

$$b_{\frac{5}{2}}^{(0)} = 85,77422;$$

$$b_{\frac{5}{2}}^{(1)} = 83,40760.$$

Les observations donnent $i - m = 0,0467900$; en supposant donc comme dans le n°. 22 du sixième livre,

$$\frac{P}{m'} = \frac{1}{383130};$$

la fonction (B) réduite en arcs de cercle, devient

$$\begin{aligned}
&+ 1'',781706 . \sin. (i - m) . v \\
&+ 0'',746665 . \sin. 2 . (i - m) . v \\
&+ 0'',405751 . \sin. 3 . (i - m) . v \\
&\&c.
\end{aligned}$$

Ce que nous désignons ici par $\frac{\delta r'}{a'}$, est désigné dans le n°. 29 du sixième livre, par $\delta r''$; on a donc par ce n°., en vertu de l'action de Vénus,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta r'}{a'} = {} & 0,0000015553 \\
& - 0,0000060012 . \cos. (i - m) . v \\
& + 0,0000171431 . \cos. 2 . (i - m) . v \\
& + 0,0000027072 . \cos. 3 . (i - m) . v \\
& + \&c.
\end{aligned}$$

La fonction (D) réduite en arcs, devient ainsi,

$$\begin{aligned}
&+ 1'',385241 . \sin. (i - m) . v \\
&- 1'',991770 . \sin. 2 . (i - m) . v \\
&- 0'',212054 . \sin. 3 . (i - m) . v \\
&\&c.
\end{aligned}$$

En la réunissant à la précédente, on a pour les inégalités lunaires dues aux actions directe et indirecte de Vénus sur la lune,

$$\begin{aligned}
&+ 3'',166947 . \sin. (i - m) . v \\
&- 1'',245105 . \sin. 2 . (i - m) . v \\
&+ 0'',193697 . \sin. 3 . (i - m) . v \\
&\&c.
\end{aligned}$$

Il faut par le n°. 44 du sixième livre, augmenter ces inégalités, dans le rapport de 1,0743 à l'unité.

Relativement à Mars, on a par le n°. 23 du sixième livre,

$$\alpha = 0{,}65630030;$$
$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 6{,}856336;$$
$$b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 5{,}727893;$$
$$b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 4{,}404530;$$
$$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 3{,}255964;$$
&c.

d'où l'on tire

$$b_{\frac{5}{2}}^{(0)} = 38{,}00346;$$
$$b_{\frac{5}{2}}^{(1)} = 36{,}20013.$$

Les observations donnent $i - m = -0{,}0350306$; en supposant donc comme dans le n°. 22 du sixième livre,

$$\frac{P}{m'} = \frac{1}{1846082};$$

la fonction (C) devient

$$\begin{aligned} &- 0'',090054 . \sin. (i-m).v \\ &- 0'',034753 . \sin. 2.(i-m).v \\ &- 0'',017234 . \sin. 3.(i-m).v \\ &\&c. \end{aligned}$$

On a ensuite par le n°. 29 du sixième livre, en vertu de l'action de Mars,

$$\begin{aligned} \frac{\delta r'}{a'} = &- 0{,}0000000478 \\ &+ 0{,}0000005487 . \cos. (i-m).v \\ &+ 0{,}0000080620 . \cos. 2.(i-m).v \\ &- 0{,}0000006475 . \cos. 3.(i-m).v \\ &\&c. \end{aligned}$$

La formule (D) réduite en arcs devient ainsi,

$$\begin{aligned} &+ 0'',169012 . \sin. (i-m).v \\ &+ 1'',246244 . \sin. 2.(i-m).v \\ &- 0'',067139 . \sin. 3.(i-m).v \\ &\&c. \end{aligned}$$

En la réunissant à la précédente, on a pour les inégalités lunaires dues aux actions directe et indirecte de Mars sur la lune,

$$+\ 0'',078958 . \sin . (i-m) . v$$
$$+\ 1'',201491 . \sin . 2 . (i-m) . v$$
$$-\ 0'',084373 . \sin . 3 . (i-m) . v$$
&c.

Il faut par le n°. 44 du sixième livre, diminuer ces inégalités, dans le rapport de 0,725 à l'unité.

Relativement à Jupiter, on a par le n°. 23 du sixième livre,

$$\alpha = 0{,}19226461\,;$$
$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 2{,}176460\,;$$
$$b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 0{,}619063\,;$$
$$b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 0{,}148198\,;$$
$$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 0{,}032439\,;$$
&c.

d'où l'on tire

$$b_{\frac{5}{2}}^{(0)} = 2{,}51906\,;$$
$$b_{\frac{5}{2}}^{(1)} = 1{,}13310.$$

Les observations donnent $i-m = -0{,}0684952$; en supposant donc, comme dans le n°. 22 du sixième livre,

$$\frac{P}{m'} = \frac{1}{1067{,}09};$$

la fonction (C) devient

$$-\ 0'',217257 . \sin . (i-m) . v$$
$$-\ 0'',026380 . \sin . 2 . (i-m) . v$$
$$-\ 0'',003936 . \sin . 3 . (i-m) . v$$
&c.

On a par le n°. 29 du sixième livre, en vertu de l'action de Jupiter,

$$\frac{\delta r'}{a'} = -\ 0{,}0000011581$$
$$+\ 0{,}0000159384 . \cos . (i-m) . v$$
$$-\ 0{,}0000090986 . \cos . 2 . (i-m) . v$$
$$-\ 0{,}0000006550 . \cos . 3 . (i-m) . v$$
&c.

La formule (D) réduite en arcs, devient ainsi,

$$\begin{aligned}&+\ 2'',519556.\sin.(i-m).v\\ &-\ 0'',729560.\sin.2.(i-m).v\\ &-\ 0'',035879.\sin.3.(i-m).v\\ &\&c.\end{aligned}$$

En la réunissant à la précédente, on a pour les inégalités lunaires dues aux actions directe et indirecte de Jupiter sur la lune,

$$\begin{aligned}&+\ 2'',302299.\sin.(i-m).v\\ &-\ 0'',755940.\sin.2.(i-m).v\\ &-\ 0'',039815.\sin.3.(i-m).v\\ &\&c.\end{aligned}$$

Si l'on prend avec un signe contraire, toutes ces inégalités résultantes de l'action des planètes sur la lune; on aura les inégalités que cette action produit dans l'expression de la longitude vraie de la lune; on pourra donc les réduire en tables, en observant que $(i-m).v$ peut être supposé égal à la longitude moyenne de la planète, moins celle de la terre. Il seroit utile de les employer dans les tables de la lune, vu la précision à laquelle ces tables ont été portées.

Le terme $\frac{P.A^{(0)}}{4h^2.u^3}$ de l'expression de $-\frac{1}{h^2}.\left(\frac{dQ}{du}\right)$, donne dans l'équation (L') du n°. 9, le terme

$$-\frac{3P.a^2.A^{(0)}}{4}.e.\cos.(cv-\varpi);$$

d'où il est facile de conclure que la valeur de c est diminuée par l'action d'une planète inférieure à la terre, de la quantité

$$\tfrac{3}{8}.\frac{P}{m'}.m^2.b_{\frac{3}{2}}^{(0)};$$

et par l'action d'une planète supérieure, de la quantité

$$\tfrac{3}{8}.\frac{P}{m'}.m^2.\alpha^3.b_{\frac{3}{2}}^{(0)}.$$

Pareillement, le terme $\frac{m'.u'^3}{2h^2.u^3}$ donne dans l'équation (L') du n°. 9, la quantité

$$-\frac{9m'.u'^3.\frac{\delta r'}{a'}}{2h^2.u^3}.e.\cos.(cv-\varpi);$$

$\frac{\delta r'}{a'}$ étant ici la partie constante des perturbations du rayon vecteur de l'orbe terrestre, donnée par le n°. 29 du sixième livre; la valeur de c est donc par-là, diminuée de la quantité

$$\frac{9m^2}{4}\cdot\frac{\delta r'}{a'}.$$

Il est facile de s'assurer que toutes ces quantités sont insensibles.

Considérons présentement les perturbations du mouvement lunaire en latitude. La somme des termes

$$-\frac{s}{h^2u}\cdot\left(\frac{dQ}{du}\right)-\frac{(1+ss)}{h^2.u^2}\cdot\left(\frac{dQ}{ds}\right),$$

qui font partie de la troisième des équations (L) du n°. 1, acquiert par l'action de P, la quantité

$$\frac{3P.s}{2h^2u^4.f^3}+\frac{3P.Rr'.S.\cos.(v-v')-3P.R^2S.\cos.(v-U)}{h^2.u^4.f^5}.$$

Cette fonction contient relativement à une planète inférieure, le terme

$$-\tfrac{3}{4}.\alpha P.\frac{a^3}{a'^3}.\left\{\alpha.b_{\frac{5}{2}}^{(0)}-b_{\frac{5}{2}}^{(1)}\right\}.\lambda.\sin.(v-\theta);$$

λ étant l'inclinaison de l'orbite de P à l'écliptique, et θ étant la longitude de son nœud ascendant. Il en résulte dans s, pour une planète inférieure, l'inégalité

$$-\frac{\tfrac{3}{8}.\alpha.\frac{P}{m'}.m^2.\left\{\alpha b_{\frac{5}{2}}^{(0)}-b_{\frac{5}{2}}^{(1)}\right\}}{g-1}.\lambda.\sin.(v-\theta);$$

pour une planète supérieure, cette inégalité devient

$$-\frac{\tfrac{3}{8}.\alpha^3.\frac{P}{m'}.m^2.\left\{b_{\frac{5}{2}}^{(0)}-\alpha b_{\frac{5}{2}}^{(1)}\right\}}{g-1}.\lambda.\sin.(v-\theta).$$

En réduisant en nombres ces inégalités, on a en employant les masses du n°. 44 du sixième livre; relativement à Vénus,

$$+0'',853296.\sin.(v-\theta');$$

relativement à Mars,

$$-0'',016966.\sin.(v-\theta''');$$

et relativement à Jupiter,

$$-0'',117051.\sin.(v-\theta^{\text{iv}});$$

θ', θ''', et θ^{iv} étant les longitudes des nœuds ascendans des orbites de Vénus, Mars et Jupiter.

Enfin, il est aisé de voir que la valeur de g est augmentée par l'action de P, de la quantité $\frac{3}{8}.\frac{P}{m'}.m^2 b_{\frac{3}{2}}^{(0)}$, relativement à une planète inférieure à la terre, et de la quantité $\frac{3}{8}.\frac{P}{m'}.m^2.\alpha^3.b_{\frac{3}{2}}^{(0)}$, relativement à une planète supérieure.

Le terme $\frac{3m'u'^3.s}{2h^2.u^4}$, qui par le n°. 11, fait partie de la troisième des équations (L) du n°. 1, augmente encore la valeur de g, de la quantité $\frac{9m^2}{4}.\frac{\delta r'}{a'}$; $\frac{\delta r'}{a'}$ étant la partie constante des perturbations du rayon vecteur de l'orbe terrestre. Ainsi, la valeur de g est augmentée par l'action des planètes, de la même quantité dont cette action diminue la valeur de c. Mais ces quantités sont insensibles.

L'action directe de P sur la lune, introduit dans l'équation (L') du n°. 9, une quantité de la forme

$$M.\frac{P}{m'}.m^2e'^2 + M'.\frac{P}{m'}.m^2.e'e'' + M''.\frac{P}{m'}.m^2.e''^2;$$

e'' étant le rapport de l'excentricité au demi-grand axe, dans l'orbite de P. Il en résulte dans la longitude moyenne de la lune, une équation séculaire analogue à celle que nous avons trouvée dans le n°. 15, égale à

$$-\tfrac{3}{2}.m^2.\int(e'^2-E'^2).dv.$$

Celle-ci résulte du développement du terme $\frac{m'.u'^3}{2h^2u^3}$; elle est incomparablement supérieure à la première, à cause du très-petit facteur $\frac{P}{m'}$ qui multiplie cette première équation. Ainsi, l'action indirecte de la planète P sur la lune, transmise par le moyen du soleil, l'emporte de beaucoup à cet égard, sur son action directe que l'on peut négliger ici sans erreur sensible.

CHAPITRE

CHAPITRE IV.

Comparaison de la théorie précédente avec les observations.

23. Considérons d'abord les moyens mouvemens de la lune, de son périgée et de ses nœuds. L'expression de la longitude moyenne de la lune, en fonction de sa longitude vraie, renferme par le n°. 15, l'inégalité séculaire

$$\tfrac{3}{2}\,m^2.\int(e'^2-E'^2).dv\,;$$

par conséquent, l'expression de la longitude vraie en fonction de la longitude moyenne, renferme l'inégalité séculaire

$$-\tfrac{3}{2}.m^2.\int(e'^2-E'^2).ndt.$$

Si l'on représente par t, le nombre des années juliennes écoulées depuis 1750, on a par le n°. 44 du sixième livre,

$$2e'=2E'-t.0'',530224-t^2.0,0000210474;$$

d'où l'on conclut l'inégalité précédente, égale à

$$31'',424757.i^2+0'',05721742.i^3;$$

i étant le nombre des siècles écoulés depuis 1750. Les observations avoient fait reconnoître cette équation séculaire, avant que la théorie de la pesanteur m'en eût expliqué la cause. Il est certain par la comparaison d'un grand nombre d'éclipses observées par les Chaldéens, les Grecs et les Arabes, que le moyen mouvement de la lune s'est accéléré depuis les temps anciens jusqu'à nos jours, et que son accélération est à très-peu-près celle qui résulte de la formule précédente. C'est ce que Bouvard a mis hors de doute, par la discussion approfondie des éclipses anciennes déjà connues et de celles qu'il a extraites d'un manuscrit arabe d'Ibn Junis.

On a vu dans le n°. 16, que le mouvement sydéral du périgée lunaire conclu de la théorie précédente, ne diffère du véritable, que de sa cinq cent soixantième partie. Suivant cette théorie, ce

mouvement est assujéti à une équation séculaire égale à $-3{,}00052 \cdot k$, k étant celle du moyen mouvement de la lune; en sorte que l'équation séculaire de l'anomalie, est $4{,}00052 \cdot k$, ou à très-peu-près, quadruple de celle du moyen mouvement. La théorie de la pesanteur universelle m'a fait connoître cette équation, et j'en avois conclu que le mouvement du périgée lunaire se rallentit de siècle en siècle, et qu'il est maintenant plus petit d'environ quinze minutes par siècle, qu'au temps d'Hypparque. Ce résultat de la théorie a été confirmé par la discussion des observations anciennes et modernes.

On a vu dans le n°. 16, que le mouvement sydéral du nœud de l'orbite lunaire sur l'écliptique vraie, conclu de l'analyse précédente, ne diffère pas du véritable, de sa trois cent cinquantième partie. L'équation séculaire de la longitude du nœud est, par le même n°., égale à $0{,}735452 \cdot k$. Les anciennes éclipses la confirment encore.

24. Considérons présentement les inégalités périodiques du mouvement lunaire en longitude. Pour comparer aux observations, celles qui ont été trouvées précédemment par la théorie; j'ai regardé comme autant de résultats de l'observation, les coëfficiens des dernières tables lunaires de Mason, et des nouvelles tables de Burg. Les coëfficiens des tables de Mason ont été déterminés par la comparaison d'un très-grand nombre d'observations de Bradley : ceux des tables de Burg l'ont été au moyen de plus de trois mille observations de Maskeline. Ces tables sont disposées d'une manière assez commode pour les calculs, et qui diminue le nombre des argumens, en les faisant dépendre les uns des autres. Voici le procédé qui résulte de celles de Mason, pour avoir les équations de la longitude vraie de la lune, procédé que j'ai développé en série de sinus d'angles croissans proportionnellement à v.

On forme d'abord les termes suivans dans lesquels je compte les anomalies, du périgée.

Coëfficiens des tables de Burg.	Coëfficiens des tables de Mason.	
− 2073″,46...	− 2063″,58.sin.	(anom. moy. ⊙)
− 18″,52...	− 27″,47.sin.	(2.anom. moy. ⊙)
+ 166″,36...	+ 172″,53.sin.	(2.long.moy. ☾ − 2.long.vraie.⊙ + anom. moy. ⊙)
+ 236″,11...	+ 232″,41.sin.	(2.long.moy. ☾ − 2.long.vraie.⊙ − anom. moy. ⊙)
− 178″,40...	− 178″,40.sin.	(2.long.moy. ☾ − 2.long.vraie.⊙ + anom. moy. ☾)
+ 14905″,87...	+ 14902″,47.sin.	(2.long.moy. ☾ − 2.long.vraie.⊙ − anom. moy. ☾)
+ 109″,26...	+ 108″,02.sin.	(4.long.moy. ☾ − 4.long.vraie.⊙ − 2.anom. moy. ☾)
+ 384″,57...	+ 381″,17.sin.	(2.long.moy. ☾ − 2.long.vraie.⊙ − anom. moy. ☾ + anom. moy. ⊙)
+ 146″,91...	+ 143″,52.sin.	(2.long.moy. ☾ − 2.long.vraie.⊙ − anom. moy. ☾ − anom. moy. ⊙)
+ 121″,30...	+ 129″,63.sin.	(anom. moy. ☾ − anom. moy. ⊙)
− 66″,05...	− 70″,06.sin.	(long. moy. ☾ − long. vraie. ⊙ − anom. moy. ☾) ; (*M*)
− 180″,86...	− 177″,16.sin.	(2.long.moy. ☾ − 2.long.vraie. ⊙ − 2.anom. moy. ☾)
+ 192″,90...	+ 186″,42.sin.	(2.long. moy. du nœud de l'orbe lunaire − 2.long. vraie. ⊙)
+ 35″,49...	+ 52″,47.sin.	(long. moy. ☾ − long. vraie. ⊙ + anom. moy. ⊙)
+ 15″,12...	+ 9″,57.sin.	(long. moy. ☾ − long. vraie. ⊙ − anom. moy. ⊙)
− 14″,20...	− 11″,42.sin.	(2.long.moy. ☾ − 2.long.vraie. ⊙ + 2.anom. moy. ☾)
− 32″,72...	− 38″,27.sin.	(4.long.moy. ☾ − 4.long.vraie. ⊙ − anom. moy. ☾)
− 19″,75...	− 19″,44.sin.	(2.long.moy. ☾ − 2.long.moy. du nœud lunaire − 2.anom. moy. ☾)
− 27″,16...	− 25″,62.sin.	(2.long. moy. du nœud lunaire − 2.long.vraie. ⊙ + an. moy. ☾)

Coëfficiens des tables de Burg.	Coëfficiens des tables de Mason.	
+ 21″,30....	+ 16″,36.sin.	(2.longitude moy. du nœud lunaire — 2.long. vraie. ⊙ — anom. moy. ☾)
+ 20″,987...	+ 23″,765.sin.	(long. moy. du nœud lunaire)
+ 8″,02....	+ 0″,00.sin.	(2.long. moy. ☾ — 2.long. vraie. ⊙ — 2.anom. moy. ⊙)
— 8″,02....	— 0″,00.sin.	(long. moy. ☾ — long. vraie. ⊙ + anom. moy. ☾)
+ 6″,48....	+ 0″,00.sin.	(3.anom. moy. ☾ — 2.long. moy. ☾ + 2.long. vraie. ⊙)
+ 6″,79....	+ 0″,00.sin.	(2.long. moy. ☾ — 2.long. vraie. ⊙ + anom. moy. ☾ + anom. moy. ⊙)
+ 4″,01....	+ 0″,00.sin.	(2.long. moy. ☾ — 2.long. vraie. ⊙ + anom. moy. ☾ — anom. moy. ⊙)
+ 3″,39....	+ 0″,00.sin.	(4.long. moy. ☾ — 4.long. vraie. ⊙ — 3.anom. moy. ☾)
+ 3″,70....	+ 0″,00.sin.	(2.long. moy. ☾ — 2.long. vraie. ⊙ — 2.anom. moy. ☾ + anom. moy. ⊙)
+ 3″,39....	+ 0″,00.sin.	(long. moy. ☾ — long. vraie. ⊙ — anom. moy. ☾ + anom. moy. ⊙).

On ajoute la somme de tous ces termes, à l'anomalie moyenne de la lune, à laquelle on ajoute encore la fonction A donnée par l'équation

	Suivant Burg.	Suivant Mason.	
A =	— 4127″,47.......	— 4018″,52.sin.	(anom. moyen. ⊙)
	— 33″,95.......	— 43″,21.sin.	(2.anom. moy. ⊙);

et l'on a l'anomalie corrigée de la lune, au moyen de laquelle on forme les termes suivans,

Burg.	Mason.	
+ 70037″,67.....	+ 70047″,24.sin.	(anom. corrigée. ☾)
+ 2396″,30.....	+ 2398″,09.sin.	(2.anom. corrigée. ☾)
+ 115″,12.....	+ 114″,75.sin.	(3.anom. corrigée. ☾)
+ 6″,17.....	+ 6″,26.sin.	(4.anom. corrigée. ☾).

; (N)

On ajoute la somme de tous les termes (M) et (N) à la longitude moyenne de la lune ; et l'on a une longitude corrigée au moyen de laquelle on forme les termes suivans,

Burg.	Mason.		
$-\ 376'',85\ldots$	$-\ 359'',26$	.sin.(long. corrigée ☾ — long. vraie. ☉)	
$+6610'',18\ldots$	$+6608'',33$	.sin.(2.long. corrigée ☾ —2.long.vraie. ☉)	
$+\ \ 10'',19\ldots$	$+\ \ 16'',05$	.sin.(3.long. corrigée ☾ —3.long.vraie. ☉)	;(P)
$+\ \ 22'',53\ldots$	$+\ \ 27'',16$	.sin.(4.long.corrigée ☾ —4.long.vraie. ☉).	

On réunit les termes (P) à la longitude vraie corrigée de la lune, et l'on forme ainsi une seconde longitude corrigée à laquelle on ajoute le supplément du nœud, ou la circonférence moins la longitude du nœud ; on lui ajoute encore la fonction B, que l'on détermine par l'équation

	Burg.	Mason.	
$B =$	$+1666'',67\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$+1703'',70$	.sin. (anom. moy. ☉).

On a ainsi la distance de la lune, au nœud corrigé. On soustrait du double de cette distance, l'anomalie corrigée de la lune, et l'on multiplie le sinus de cet argument par $-260'',49$, suivant Burg, et par $-259'',56$, suivant Mason ; ce qui donne une nouvelle inégalité que l'on ajoute aux inégalités (M), (N), (P). Enfin, on ajoute cette même inégalité, à la distance précédente de la lune au nœud corrigé, pour former l'argument de latitude, et l'on multiplie le sinus du double de cet argument par $-1255'',56$, suivant Burg, et par $-1258'',34$, suivant Mason ; ce qui donne l'inégalité nommée *réduction à l'écliptique*, qui doit être ajoutée à toutes les inégalités précédentes, pour avoir la longitude de la lune, comptée de l'équinoxe moyen du printemps. Il faut observer ici que les longitudes moyennes de la lune et de son nœud, et son anomalie moyenne, doivent être corrigées par leurs équations séculaires.

J'ai conclu de ce procédé, l'expression suivante des inégalités périodiques de la longitude moyenne de la lune, développée en fonction de sa longitude vraie comptée sur l'écliptique ; ce qui exige une attention particulière pour n'omettre aucun terme sensible : j'ai négligé les inégalités au-dessous d'une seconde. Une

partie des inégalités de cette expression, résulte du développement seul de la formule que donne le procédé des tables de Mason, que je viens d'exposer; en sorte qu'elles ne peuvent point être considérées dans ces tables, comme des résultats de l'observation. Pour les distinguer, j'ai marqué d'une astéristique, celles que Mason a déterminées par la comparaison des observations de Bradley, et qui toutes ont été déterminées de nouveau par Burg, au moyen d'un très-grand nombre d'observations de Maskeline. Je donne d'abord la grande inégalité du premier ordre; ensuite, les cinq inégalités du second ordre; puis, les quinze inégalités du troisième ordre; ensuite, toutes les inégalités du quatrième ordre et d'un ordre supérieur, qui ont été comparées aux observations; enfin, toutes les autres inégalités. Je place à côté, les résultats de mon analyse, et leur excès sur les coëfficiens déduits des tables de Mason. Dans une quatrième colonne, je donne l'excès des coëfficiens des nouvelles tables de Burg, réduites à la forme de ma théorie, sur ceux des tables de Mason. Burg ayant conservé à ses tables, la forme de celles de Mason qui lui-même avoit adopté celle des tables de Mayer; il suffit, pour les réduire à la forme de ma théorie, d'appliquer aux coëfficiens des tables de Mason, ainsi réduites, la différence prise avec un signe contraire, des inégalités correspondantes dans les deux tables primitives. Les fonctions $\mathcal{A}$ et B, sont un peu différentes dans ces deux tables; j'ai eu égard à cette différence. J'observerai sur cela, qu'en introduisant dans les tables primitives, une inégalité pour la longitude, dépendante de sin. (anom. moy. ☾ + anom. moy. ☉), et pour la latitude, une inégalité dépendante de sin. (arg. de latitude + anom. moy. ☉), et en changeant convenablement les coëfficiens des inégalités dépendantes de sin. (anom. moy. ☾ — anom. moy. ☉), et de sin. (arg. de latitude — anom. moy. ☉); on pourroit se dispenser d'introduire les fonctions $\mathcal{A}$ et B; ce qui donneroit aux tables plus d'uniformité. Burg a fait entrer dans ses tables du mouvement en longitude, huit inégalités nouvelles qui ne sont données dans les tables réduites de Mason, que par leur développement: je les ai distinguées par une double astéristique. Enfin, il a comparé aux observations, plusieurs inégalités qu'il a trouvées insensibles; en sorte que leurs coëfficiens donnés par le développe-

ment des tables de Mason, peuvent maintenant être considérés comme des résultats de l'observation : je les ai distingués par une triple astéristique. On pourra ainsi reconnoître les inégalités qui restent encore à comparer aux observations. Le peu de différence qui existe entre les deux tables, permet de conclure ainsi le développement de l'une d'elles, du développement de l'autre; et l'on peut par la méthode inverse, réduire les inégalités de ma théorie, à la forme des tables de Mayer.

Inégalités déduites des tables de Mason.	Coëfficiens de ma théorie.	Excès de ces coëfficiens sur ceux déduits des tables de Mason.	Excès des coëfficiens déduits des tables de Burg, sur ceux déduits des tables de Mason.
	Inégalité du premier ordre.		
$-69992'',30.\sin.(cv-\varpi)^{*}$	$-69992'',30$	$+\ 0'',00$	$+\ 9'',57$ (1)
	Inégalités du second ordre.		
$+\ 1427'',41.\sin.(2cv-2\varpi)^{*}$	$+\ 1442'',66$	$+15'',25$	$+\ 1'',79$
$-\ 5874'',70.\sin.(2v-2mv)^{*}$	$-\ 5856'',11$	$+18'',59$	$-\ 1'',85$
$-14449'',19.\sin.(2v-2mv-cv+\varpi)^{*}$	$-14461'',28$	$-12'',09$	$-\ 3'',40$
$+\ 2075'',71.\sin.(c'mv-\varpi')^{*}$	$+\ 2106'',09$	$+30'',38$	$+\ 9'',88$
$+\ 1256'',47.\sin.(2gv-2\theta)^{*}$	$+\ 1255'',92$	$-\ 0'',55$	$-\ 2'',78$
	Inégalités du troisième ordre.		
$-\ 33'',19.\sin.(3cv-3\varpi)^{*}$	$-\ 35'',34$	$-\ 2'',15$	$-\ 0'',47$
$+\ 188'',67.\sin.(2gv-cv-2\theta+\varpi)^{*}$	$+\ 204'',86$	$+16'',19$	$+\ 0'',93$
$-\ 69'',16.\sin.(2gv+cv-2\theta-\varpi)^{***}$	$-\ 70'',86$	$-\ 1'',70$	$+\ 0'',00$
$+\ 450'',56.\sin.(2v-2mv+cv-\varpi)^{*}$	$+\ 453'',58$	$+\ 3'',02$	$+\ 0'',00$
$+\ 44'',77.\sin.(2v-2mv+c'mv-\varpi)^{*}$	$+\ 42'',02$	$-\ 2'',75$	$+\ 6'',17$
$-\ 421'',37.\sin.(2v-2mv-c'mv+\varpi)^{*}$	$-\ 415'',16$	$+\ 6'',21$	$-\ 3'',70$
$+\ 67'',11.\sin.(2v-2mv-cv+c'mv+\varpi-\varpi')^{*}$	$+\ 74'',96$	$+\ 7'',85$	$-\ 3'',40$
$-\ 635'',09.\sin.(2v-2mv-cv-c'mv+\varpi+\varpi')^{*}$	$-\ 635'',26$	$-\ 0'',17$	$-\ 3'',39$
$+\ 211'',84.\sin.(cv+c'mv-\varpi-\varpi')^{*}$	$+\ 219'',11$	$+\ 7'',27$	$+\ 5'',96$
$-\ 360'',50.\sin.(cv-c'mv-\varpi+\varpi')^{*}$	$-\ 362'',18$	$-\ 1'',68$	$+\ 2'',37$
$+\ 551'',31.\sin.(2cv-2v+2mv-2\varpi)^{*}$	$+\ 521'',91$	$-29'',40$	$-\ 3'',70$

(1) Le coëfficient de cette inégalité est une des arbitraires de la théorie, et je pense qu'à cet égard, il convient d'adopter le résultat de Burg.

Inégalités déduites des tables de Mason.	Coëfficiens de ma théorie.	Excès de ces coëfficiens sur ceux déduits des tables de Mason.	Excès des coëfficiens déduits des tables de Burg, sur ceux déduits des tables de Mason.
$+\ 172'',28 \,.\sin.(2gv-2v+2mv-2\theta)^{*}$	$+\ 174'',74$	$+\ 2'',46$	$+\ 6'',48$
$+\ 27'',47 \,.\sin.(2c'mv-2\varpi')^{*}$	$+\ 31'',25$	$+\ 3'',78$	$-\ 8'',95$
$+\ 360'',12 \,.\sin.(v-mv)^{*}$	$+\ 376'',586.(1+i)$		$+17'',59$
$-\ 58'',50 \,.\sin.(v-mv+c'mv-\varpi')^{*}$	$-\ 58'',05.(1+i)$		$+16'',98.$

Inégalités du quatrième ordre et d'un ordre supérieur, qui ont été comparées aux observations.

$-\ 1'',03 \,.\sin.(4cv-4\varpi)^{*}$			$+\ 0'',09$
$-\ 6'',10 \,.\sin.(2gv-2cv-2\theta+2\varpi)^{*}$			$+\ 0'',31$
$+\ 23'',765 \,.\sin.(gv-v-\theta)^{*}$	$+\ 17'',135$	$-\ 6'',63$	$-\ 2'',778$
$-\ 21'',67 \,.\sin.(3v-3mv)^{*}$			$+\ 5'',86$
$+\ 17'',50 \,.\sin.(4v-4mv)^{*}$			$+\ 4'',63$
$+\ 2'',38 \,.\sin.(cv+2c'mv-\varpi-2\varpi')^{*}$			$-\ 0'',51$
$-\ 2'',38 \,.\sin.(cv-2c'mv-\varpi+2\varpi')^{*}$			$+\ 0'',51$
$-\ 27'',49 \,.\sin.(2cv+2v-2mv-2\varpi)^{*}$	$-\ 25'',03$	$+\ 1'',66$	$+\ 2'',78$
$+\ 89'',34 \,.\sin.(4v-4mv-cv+\varpi)^{*}$	$+103'',01$	$+13'',67$	$+\ 5'',55$
$+\ 46'',79 \,.\sin.(4v-4mv-2cv+2\varpi)^{*}$	$+\ 47'',71$	$+\ 0'',92$	$-\ 1'',24$
$-\ 52'',61 \,.\sin.(cv-v+mv-\varpi)^{*}$	$-\ 25'',65.(1+i)$		$+\ 4'',01$
$-\ 3'',53 \,.\sin.(v-mv-c'mv+\varpi')^{*}$			$-\ 5'',55$
$+\ 29'',45 \,.\sin.(2v-2mv-2gv+cv+2\theta-\varpi)^{*}$	$+\ 26'',77$	$-\ 2'',68$	$+\ 1'',54$
$+\ 3'',73 \,.\sin.(2gv+cv-2v+2mv-2\theta-\varpi)^{*}$			$+\ 4'',94$
$-\ 10'',87 \,.\sin.(2v-2mv-2c'mv+2\varpi)^{**}$			$-\ 8'',02$
$-\ 18'',12 \,.\sin.(cv+v-mv-\varpi)^{**}$	$-\ 15'',47.(1+i)$		$+\ 8'',02$
$+\ 3'',08 \,.\sin.(3cv-2v+2mv-2\varpi)^{**}$			$-\ 6'',48$
$+\ 1'',82 \,.\sin.(2v-2mv+cv+c'mv-\varpi-\varpi')^{**}$			$-\ 6'',79$
$+\ 39'',38 \,.\sin.(2v-2mv+cv-c'mv-\varpi+\varpi')^{**}$	$+\ 31'',39$	$-\ 7'',99$	$-\ 4'',01$
$+\ 2'',36 \,.\sin.(4v-4mv-3cv+3\varpi)^{**}$			$-\ 3'',39$
$+\ 3'',04 \,.\sin.(2cv-2v+2mv-c'mv-2\varpi+\varpi')^{**}$	$-\ 0'',76$	$-\ 3'',80$	$+\ 3'',70$
$+\ 4'',05 \,.\sin.(cv-v+mv-c'mv-\varpi+\varpi')^{**}$			$+\ 3'',39$
$+\ 19'',72 \,.\sin.(2cv-2v+2mv+c'mv-2\varpi-\varpi')^{***}$	$+\ 18'',15$	$-\ 1'',57$	
$-\ 3'',73 \,.\sin.(4v-4mv+cv-\varpi)^{***}$			
$+\ 0'',56 \,.\sin.(4cv-4v+4mv-4\varpi)^{***}$			
$-\ 12'',06 \,.\sin.(2v-2mv+2gv-2\theta)^{***}$			
$\pm\ 3'',36 \,.\sin.(2gv\pm c'mv-2\theta\mp\theta)^{***}$			
$-\ 1'',03 \,.\sin.(2gv+2cv-2v+2mv-2\theta-2\varpi)^{***}$			
$\pm\ 6'',26 \,.\sin.(2gv-2v+2mv\pm c'mv-2\theta\mp\varpi')^{***}$			

Inégalités

Inégalités du quatrième ordre et d'un ordre supérieur, déduites des tables de Mason, et qui n'ont point été comparées aux observations.

Inégalités déduites des tables de Mason.	Coëfficiens de ma théorie.	Excès de ces coëfficiens sur ceux déduits des tables de Mason.
$+\ 15'',32 \cdot \sin.(2cv - c'mv - 2\varpi + \varpi')$	$+\ 13'',89$	$-\ 1'',43$
$-\ 8'',71 \cdot \sin.(2cv + c'mv - 2\varpi - \varpi')$	$-\ 9'',75$	$-\ 1'',04$
$+\ 14'',52 \cdot \sin.(4v - 4mv - cv - c'mv + \varpi + \varpi')$		
$-\ 13'',78 \cdot \sin.(2v - 2mv + 2gv - cv - 2\theta + \varpi)$		
$-\ 1'',18 \cdot \sin.(2v - 2mv - 2gv + 2cv + 2\theta - 2\varpi)$		
$+\ 5'',99 \cdot \sin(4v - 4mv - 2cv + c'mv + 2\varpi - \varpi')$		
$+\ 4'',87 \cdot \sin.(4v - 4mv - 2cv - c'mv + 2\varpi + \varpi')$		
$-\ 3'',63 \cdot \sin.(3v - 3mv - cv + \varpi)$		
$+\ 2'',48 \cdot \sin.(4gv - 4\theta)$		
$+\ 9'',36 \cdot \sin.(2v - 2mv - cv + 2c'mv + \varpi - 2\varpi')$		
$-\ 17'',88 \cdot \sin.(2v - 2mv - cv - 2c'mv + \varpi + 2\varpi')$		
$+\ 1'',69 \cdot \sin.(4v - 4mv - 2gv - cv + 2\theta + \varpi)$		
$-\ 1'',39 \cdot \sin.(4v - 4mv - c'mv + \varpi')$		
$+\ 2'',05 \cdot \sin.(6v - 6mv - 3cv + 3\varpi)$		
$-\ 1'',20 \cdot \sin.(cv - v + mv + c'mv - \varpi - \varpi')$		
$+\ 1'',03 \cdot \sin.(4v - 4mv + c'mv - \varpi')$.		

On voit par ce tableau, que la plus grande différence entre les coëfficiens des tables de Mason, et ceux de notre théorie, n'est que de $30''$; et qu'elle n'est que de $26''$ entre notre théorie et les tables de Burg. On la feroit sans doute disparoître, en portant plus loin encore les approximations; mais la comparaison précédente suffit pour établir incontestablement, que la gravitation universelle est l'unique cause de toutes les inégalités de la lune.

Deux de ces inégalités méritent par leur importance, d'être déterminées avec un soin particulier. La première est celle que l'on a nommée *inégalité parallactique*, et dont l'argument est $v - mv$. Elle dépend de la parallaxe du soleil. Je l'ai déterminée en portant l'approximation jusqu'aux quantités du cinquième ordre inclusivement; j'ai donc lieu de croire la valeur à laquelle je suis parvenu, très-exacte. Suivant les tables de Mason, réduites à

la forme de ma théorie, cette inégalité est égale à 360'',12 ; mais Burg qui vient de la déterminer par la comparaison d'un très-grand nombre d'observations, la trouve plus grande de 17'',59, et par conséquent égale à 377'',71. En égalant à ce dernier résultat, le coëfficient $(1+i).376'',586$, donné par mon analyse ; on a

$$1+i = 1,002985 ;$$

partant

$$\frac{a}{a'} = \frac{1,002985}{400} ;$$

or la parallaxe solaire est $\frac{D}{a'}$ ou $\frac{D}{a}.\frac{a}{a'}$; cette parallaxe est donc égale à

$$\frac{D}{a}.\frac{1,002985}{400}.$$

En substituant pour $\frac{D}{a}$, sa valeur 0,01655101, trouvée dans le n°. 19, on a 26'',4205 pour la parallaxe moyenne du soleil, sur le parallèle dont le carré du sinus de latitude est $\frac{1}{3}$; ce qui est à très-peu-près celle que plusieurs Astronomes ont conclue du dernier passage de Vénus sur le Soleil ; la théorie de la Lune offre donc un moyen fort exact pour déterminer cette parallaxe.

La seconde inégalité est celle qui dépend de la longitude du nœud de l'orbite lunaire, ou de l'argument $gv - v + \theta$. Son coëfficient, suivant Mason, est 23'',765 ; mais Burg qui vient de le déterminer par un très-grand nombre d'observations, le réduit à 20'',987. La théorie donne par le n°. 20, 17'',135, en supposant l'applatissement de la terre $\frac{1}{334}$, et 35'',490, en supposant cet applatissement $\frac{1}{230}$; d'où il est facile de conclure que la détermination de Burg répond à $\frac{1}{305,05}$ d'applatissement. Cette inégalité est déterminée avec beaucoup de précision, par la théorie : on n'a point à craindre à son égard, l'incertitude que le peu de convergence des approximations laisse sur les coëfficiens de la plupart des inégalités lunaires ; et comme elle est liée à l'applatissement de la terre, sa détermination exacte par les observations, mérite toute l'attention des Astronomes. Il résulte sans aucun doute, des valeurs que Mason et Burg

lui ont assignées, que la terre est moins applatie que dans le cas de l'homogénéité; ce qui est conforme à ce que nous avons trouvé par d'autres phénomènes, dans les livres III, IV et V.

25. Considérons présentement, le mouvement de la lune en latitude. On le détermine par les tables de la manière suivante. Si l'on nomme *longitude corrigée* de la lune, la longitude moyenne à laquelle on applique toutes les inégalités, à l'exception de la réduction; la latitude de la lune est égale à

Burg.	Mason.	
+ 57163″,03 . . .	+ 57174″,40 . sin.	(argument de la latitude)
— 15″,43 . . .	— 13″,58 . sin.	(3 . arg. de latitude)
+ 1630″,86 . . .	+ 1630″,86 . sin.	(2 . longit. corrigée ☾ — 2 . longit. vraie. ⊙ — arg. de latitude)
— 9″,57 . . .	— 9″,57 . sin.	(arg. de lat. — anom. moy. ⊙)
+ 54″,32 . . .	+ 54″,32 . sin.	(arg. de lat. — anom. moy. ☾)
+ 77″,47 . . .	+ 77″,47 . sin.	(2 . anom. moy. ☾ — arg. de lat.)
+ 5″,86 . . .	+ 5″,86 . sin.	(3 . anom. moy. ☾ — arg. de lat.)
+ 27″,78 . . .	+ 27″,78 . sin.	(2.long.corrig. ☾ — 2.long.vraie. ⊙ — arg. de lat. + anom. moy. ⊙)
+ 11″,42 . . .	+ 11″,42 . sin.	(2.long corrig. ☾ — 2.long.vraie. ⊙ — arg. de lat. — anom. moy. ⊙)
+ 6″,79 . . .	+ 6″,79 . sin.	(2.long.corrig. ☾ — 2.long.vraie. ⊙ — arg. de lat. + anom. moy. ☾)
+ 49″,07 . . .	+ 49″,07 . sin.	(arg. de lat. + an. moy. ☾ — 2.long. corrig. ☾ + 2 . long. vraie . ⊙)
+ 16″,05 . . .	+ 16″,05 . sin.	(arg. de lat. + 2 . anom. moy. ☾ — 2.long. cor. ☾ + 2 . long.vraie . ⊙)
— 24″,6914 .	— 0″,00 . sin.	(long. corrigée . ☾).

En réduisant ces formules, en sinus d'angles croissans proportionnellement à v; j'ai obtenu les résultats suivans,

Tables de Mason.	Coëfficiens de ma théorie.	Excès de ces coëfficiens sur ceux déduits des tables de Mason.	Excès des coëf[...] déduits des tab[...] Burg, sur ceux d[...] des tables de Ma[...]
$57234'',37 . \sin. (gv - \theta)$ *	$57230'',83$ ...	$-\ 3'',54$ ...	$-11'',37$
$+\ 42'',84 . \sin. (3gv - 3\theta)$ *	$+\ 38'',78$ ...	$-\ 4'',06$ ...	$-\ 1'',85$
$+\ 1627'',13 . \sin. (2v - 2mv - gv + \theta)$ *	$+\ 1621'',09$ ...	$-\ 6'',04$ ...	$+\ 0'',00$
$+\ 2'',16 . \sin. (2v - 2mv + gv - \theta)$	$+\ 3'',52$ ...	$+\ 1'',36$ ...	$+\ 0'',00$
$-\ 12'',64 . \sin. (gv + cv - \theta - \varpi)$ *	$-\ 17'',26$ ...	$-\ 4'',62$ ...	$+\ 0'',00$
$+\ 61'',21 . \sin. (gv - cv - \theta + \varpi)$ *	$+\ 61'',27$ ...	$+\ 0'',06$ ...	$+\ 0'',00$
$+\ 66'',86 . \sin. (gv + cv - 2v + 2mv - \theta - \varpi)$ *	$+\ 66'',66$ ...	$-\ 0'',20$ ...	$+\ 0'',00$
$-\ 2'',61 . \sin. (2v - 2mv + gv - cv - \theta + \varpi)$	$-\ 4'',28$ ...	$-\ 1'',67$ ...	$+\ 0'',00$
$+\ 18'',44 . \sin. (2v - 2mv - gv + cv + \theta - \varpi)$ *	$+\ 19'',95$ ...	$+\ 1'',51$ ...	$+\ 0'',00$
$+\ 76'',50 . \sin. (gv + c'mv - \theta - \varpi')$ *	$+\ 75'',14$ ...	$-\ 1'',36$ ...	$-\ 1'',66$
$-\ 86'',07 . \sin. (gv - c'mv - \theta + \varpi')$ *	$-\ 80'',06$ ...	$+\ 6'',01$ ...	$+\ 1'',66$
$-\ 29'',21 . \sin. (2v - 2mv - gv + c'mv + \theta - \varpi')$ *	$-\ 31'',47$ ...	$-\ 2'',26$ ...	$-\ 0'',00$
$+\ 68'',40 . \sin. (2v - 2mv - gv - c'mv + \theta + \varpi')$ *	$+\ 69'',19$ ...	$+\ 0'',79$ ...	$+\ 0'',00$
$+\ 79'',46 . \sin. (2cv - gv - 2\varpi + \theta)$ *	$+\ 84'',57$ ...	$+\ 5'',11$ ...	$+\ 0'',00$
$+\ 13'',35 . \sin. (2cv + gv - 2v + 2mv - 2\varpi - \theta)$ *	$+\ 15'',83$ ...	$+\ 2'',48$ ...	$+\ 0'',00$
$-\ 2'',65 . \sin. (3cv - gv - 3\varpi + \theta)$ *			$-\ 0'',00$
$+\ 3'',22 . \sin. (3gv - 2v + 2mv - 3\theta)$			$+\ 0'',00$
$+\ 1'',13 . \sin. (4v - 4mv - gv + \theta)$			$+\ 0'',00$
$+\ 1'',76 . \sin (3cv - gv - 2v + 2mv - 3\varpi + \theta)$			$+\ 0'',00$
$\pm\ 1'',72 . \sin. (cv + gv - 2v + 2mv \pm c'mv - \varpi - \theta \pm \varpi')$			$+\ 0'',00$
$\mp\ 1'',77 . \sin. (2cv + gv - 2v + 2mv \pm cv - 2\varpi - \theta + \varpi)$			
$+\ 2'',77 . \sin. (4v - 4mv - gv - cv + \theta + \varpi)$			$+\ 0'',00$
$-\ 0'',00 . \sin.$ (long. vraie. ☾) **	$-\ 20'',023$ ...		$-24'',691$[...]

Ici, la théorie se rapproche encore plus de l'observation, que relativement au mouvement de la lune en longitude ; ce qui vient de ce que les approximations de son mouvement en latitude sont plus simples, et par conséquent plus exactes. Je pense donc qu'il convient de former les tables de ce mouvement, par la théorie ; afin de ramener autant qu'il est possible, toute l'astronomie, au seul principe de la pesanteur universelle. L'inégalité $-20'',023 . \sin.$ (long. vraie. ☾) n'existe point dans les tables de Mason. C'est la théorie qui me la fait connoître, et toutes les observations la con–

(1) Le coëfficient de cette inégalité est une des arbitraires de la théorie, et le résultat de Burg me paroît devoir être préféré.

firment d'une manière incontestable. Burg l'a trouvée égale à —24″,6914.sin.(long. vraie. ☾), par la comparaison d'un très-grand nombre d'observations de Maskeline. Son coëfficient est, par le n°. 19, égal à —20″,023, en supposant l'applatissement de la terre $\frac{1}{334}$; il s'élèveroit à 41″,70, si cet applatissement étoit $\frac{1}{230}$ comme dans le cas de l'homogénéité de cette planète; d'où il est facile de conclure que le coëfficient —24″,6914 trouvé par Burg, répond à l'applatissement $\frac{1}{304,6}$. Il est très-remarquable que cette inégalité conduise au même applatissement, que l'inégalité du mouvement en longitude, dépendante du sinus de la longitude du nœud, que nous avons donnée dans le n°. 29. Ces deux inégalités qui, par la lumière qu'elles répandent sur la figure de la terre, méritent toute l'attention des observateurs, se réunissent pour exclure son homogénéité.

26. Il nous reste à considérer la parallaxe horizontale de la lune. Voici l'expression de cette parallaxe à l'équateur, suivant les tables de Burg et de Mason.

Burg.	Mason et Mayer.
+10558″,64...	+10590″,74
— 0″,93...	— 0″,93.cos.(anom. moy. ⊙)
+ 2″,16...	+ 2″,16.cos.(2.long. moy. ☾ — 2.long. vraie. ⊙ + anom. moy. ⊙)
+ 2″,47...	+ 2″,47.cos.(2.long. moy. ☾ — 2.long. vraie. ⊙ — anom. moy. ⊙)
— 0″,31...	— 0″,31.cos.(2.long. moy. ☾ — 2.long. vraie. ⊙ + anom. moy. ☾)
+ 115″,12...	+ 115″,12.cos.(2.long. moy. ☾ — 2.long. vraie. ⊙ — anom. moy. ☾)
+ 0″,93...	+ 0″,93.cos.(4.long. moy. ☾ — 4.long. vraie. ⊙ — 2.anom. moy. ☾)
+ 3″,09...	+ 3″,09.cos.(2.long. moy. ☾ — 2.long. vraie. ⊙ — anom. moy. ☾ + anom. moy. ⊙)
+ 1″,85...	+ 1″,85.cos.(2.long. moy. ☾ — 2.long. vraie. ⊙ — anom. moy. ☾ — anom. moy. ⊙)

Burg.	Mason et Mayer.
+ 0″,62...	+ 0″,62.cos. (anom. moy. ☾ — anom. moy. ☉)
+ 0″,62...	+ 0″,62.cos.(long. moy. ☾ — long. vraie.☉ — anom. moy. ☾)
+ 6″,17...	+ 6″,17.cos.(2.long. moy. ☾ — 2.long. vraie.☉ — 2.anom. moy. ☾)
+ 1″,23...	+ 1″,23.cos.(2.long. moy. du nœud lunaire — 2.long. vraie.☉)
+ 578″,09...	+ 579″,32.cos. (anom. corrigée. ☾)
+ 30″,86...	+ 30″,86.cos. (2.anom. corrigée. ☾)
+ 0″,62...	+ 0″,93.cos. (3.anom. corrigée. ☾)
+ 80″,25...	+ 80″,25.cos.(2.long. corrigée. ☾ — 2.long. vraie.☉)
— 3″,09...	— 3″,09.cos.(long. corrigée. ☾ — long. vraie.☉)
+ 0″,62...	+ 0″,62.cos.(3.long. corrigée. ☾ — 3.long. vraie.☉)
— 2″,47...	— 2″,47.cos.(distance vraie de ☾ au nœud — anom. corrigée. ☾),

Pour avoir la parallaxe horizontale à une hauteur quelconque du pôle, Burg suppose l'ellipticité de la terre, $\frac{1}{330}$: Mayer la suppose $\frac{1}{230}$. Je la supposerai conformément à la détermination du n°. précédent, $\frac{1}{305}$. On multiplie ensuite les coëfficiens de cette table, par l'unité moins le produit de l'ellipticité de la terre par le carré du sinus de la latitude. Cela posé, on a pour la parallaxe horizontale de la lune à l'équateur, réduite en cosinus d'angles croissans proportionnellement à l'angle v,

Mason et Mayer.	Coëfficiens de ma théorie.	Excès de ces coëfficiens sur ceux des tables de Mason.	Excès des coëfficie de Burg sur ceux Mason.
+ 10624″,81*	+ 10580″,03...	— 44″,78...	— 32″,10
+ 581″,66.cos. $(cv - \varpi)$	+ 579″,26...	— 2″,40...	— 1″,23
— 1″,61.cos. $(2cv - 2\varpi)$	+ 0″,03...	+ 1″,64...	+ 0″,00
— 0″,95.cos. $(3cv - 3\varpi)$			+ 0″,00
+ 0″,30.cos. $(4cv - 4\varpi)$			+ 0″,00
+ 74″,81.cos. $(2v - 2mv)$	+ 76″,18...	+ 1″,37...	+ 0″,00
+ 118″,55.cos. $(2v - 2mv - cv + \varpi)$	+ 117″,62...	— 0″,93...	+ 0″,00

Mason et Mayer.	Coëfficiens de ma théorie.	Excès de ces coëfficiens sur ceux des tables de Mason.	Excès des coëfficiens de Burg sur ceux de Mason.
$-3'',62.\cos.(2v-2mv+cv-\varpi)$	$-2'',16$	$+1'',46$	$+0'',00$
$-0'',54.\cos.(2v-2mv+c'mv-\varpi')$	$-0'',53$	$+0'',01$	$+0'',00$
$+5'',17\ \cos.(2v-2mv-c'mv+\varpi')$	$+5'',06$	$-0'',11$	$+0'',00$
$-0'',93.\cos.(c'mv-\varpi')$	$-1'',03$	$-0'',10$	$+0'',00$
$-0'',28.\cos.(2v-2mv-cv+c'mv+\varpi-\varpi')$	$-0'',68$	$-0'',40$	$+0'',00$
$+5'',22.\cos.(2v-2mv-cv-c'mv+\varpi+\varpi')$	$+5'',04$	$-0'',18$	$+0'',00$
$-0'',89.\cos.(cv+c'mv-\varpi-\varpi')$	$-2'',02$	$-1'',13$	$+0'',00$
$+1'',50.\cos.(cv-c'mv-\varpi+\varpi')$	$+2'',67$	$+1'',17$	$+0'',00$
$+11'',93.\cos.(2cv-2v+2mv-2\varpi)$	$+11'',10$	$-0'',83$	$+0'',00$
$+1'',23.\cos.(2gv-2v+2mv-2\theta)$	$-0'',58$	$+1'',81$	$+0'',00$
$-3'',09.\cos.(v-mv)$	$-2'',99.(1+i)$		$+0'',00$
$-0'',22.\cos.(4v-4mv)$			$+0'',00$
$-0'',20.\cos.(4v-4mv-2cv+2\varpi)$	$+0'',14$	$+0'',34$	$+0'',00$
$-0'',46.\cos.(4v-4mv-cv+\varpi)$	$-0'',46$	$+0'',00$	$+0'',00$
$-0'',68.\cos.(3cv-2v+2mv-3\varpi)$			$+0'',00$
$-3'',04.\cos.(2gv-cv-2\theta+\varpi)$	$-2'',92$	$+0'',12$	$+0'',00$
$+0'',57.\cos.(2gv+cv-2\theta-\varpi)$			$+0'',00$
$-0'',62.\cos.(cv-v+mv-\varpi)$	$-0'',38.(1+i)$		$+0'',00$
$-0'',32.\cos.(2cv+2v-2mv-2\varpi)$	$+0'',07$	$+0'',39$	$+0'',00.$

Les inégalités de la parallaxe des tables de Mayer, Mason et Burg, sont dérivées de la théorie de Mayer, et l'on voit par le tableau précédent, qu'il y a très-peu de différence entre les coëfficiens de ces inégalités et ceux de mon analyse; cependant j'ai lieu de croire ceux-ci plus exacts, puisque ma théorie représente mieux que celle de Mayer, le mouvement de la lune en longitude. C'est un point de pure analyse; car les observations ne seront jamais assez précises, pour déterminer d'aussi petites différences. A l'égard de la constante de la parallaxe, Mayer et Burg l'ont déterminée par les observations. Ce dernier astronome a principalement fait usage d'un très-grand nombre d'observations de Maskeline, et il a trouvé cette constante plus petite que celle de Mayer, de $32'',10$. J'ai déduit dans le n°. 19, cette constante, des expériences sur la longueur du pendule à secondes, et des mesures des degrés terrestres; et j'ai trouvé qu'il faut diminuer encore de $12'',7$ la constante déterminée

par Burg. Cette différence dépend-elle des erreurs des observations, ou des élémens que j'ai employés dans mon calcul ? c'est ce que la suite des observations fera connoître. Le seul élément qui me paroisse susceptible de quelque incertitude, est la masse de la lune. On a vu dans le chapitre XVI du sixième livre, que pour faire coïncider le résultat de la théorie avec celui de Burg, il faut diminuer la masse de la lune, et la réduire de $\frac{1}{58,6}$ à $\frac{1}{74,2}$. Cette diminution paroît un peu trop forte d'après les phénomènes des marées et de la nutation de l'axe terrestre, et d'après l'équation lunaire des tables du soleil. Il paroît donc qu'il faut encore diminuer de deux ou trois secondes, la constante de la parallaxe de la lune déterminée par cet astronome qui, par la comparaison d'un très-grand nombre d'observations, a déjà diminué la constante adoptée par les autres Astronomes, et s'est ainsi fort rapproché de sa véritable valeur.

CHAPITRE

CHAPITRE V.

Sur une inégalité à longue période, qui paroît exister dans le mouvement de la lune.

27. Nous avons remarqué dans le commencement de ce livre, que le moyen mouvement de la lune, conclu par la comparaison des observations de Flamsteed et de Bradley, est sensiblement plus grand que celui qui résulte des observations de Bradley comparées aux observations de Maskeline; et que les observations faites depuis quinze à vingt ans, indiquent dans ce mouvement, une diminution plus grande encore. Cela semble prouver qu'il existe dans la théorie de ce satellite, une ou plusieurs inégalités à longues périodes, dont il est important de connoître la loi. En examinant avec la plus scrupuleuse attention cette théorie; on voit que l'action des planètes ne produit aucune inégalité semblable, comme on peut s'en convaincre par l'analyse exposée dans le n°. 21; mais l'attraction du soleil produit dans l'expression de $nt+\varepsilon$, une inégalité proportionnelle au sinus de l'angle

$$3v - 3mv + 3c'mv - 2gv - cv + 2\theta + \varpi - 3\varpi'.$$

Les termes qui composent cette inégalité sont très-petits dans les équations différentielles; mais quelques-uns d'eux acquièrent par les intégrations successives, le diviseur $(3 - 3m + 3c'm - 2g - c)^2$, et ce diviseur peut les rendre sensibles, par son excessive petitesse. Pour déterminer ce diviseur, nous observerons que l'on a par le n°. 16,

$$3 - 2g - c = 0{,}00040859.$$

De plus, le mouvement annuel du périgée solaire étant par le n°. 25 du sixième livre, égal à $36'',881443$; on a

$$1 - c' = 0{,}0000092035;$$

d'où l'on tire,

$$3 - 3m + 3c'm - 2g - c = 0{,}00040652;$$

et par conséquent

$$(3-3m+3c'm-2g-c)^2 = 0{,}0000001 6526.$$

A la vérité, on a vu dans le n°. 5, que le carré du coëfficient de l'angle v ne peut pas en vertu des intégrations successives, être diviseur de l'inégalité correspondante, lorsque l'on n'a égard qu'à la première puissance de la force perturbatrice; mais cela cesse d'avoir lieu pour les termes dépendans du carré de cette force, et l'inégalité dépendante de $3v-3mv+3c'mv-2gv-cv+2\theta+\varpi-3\varpi'$, ne peut résulter que de ces termes. Pour le faire voir, considérons le terme $3a\int\int ndt.\mathrm{d}R$ de l'expression de δv, donnée par la formule (Y) du n°. 46 du second livre : ce terme paroît être celui dont l'inégalité que nous considérons, doit principalement dépendre. Le développement de R donne des termes de la forme

$$H.\cos.(3nt-3n't+3c'n't-2gnt-cnt+2\theta+2\varpi-3\varpi').$$

Si ces termes ne résultent que de la première puissance de la force perturbatrice; $n't$ et $c'n't$ se rapportent aux coordonnées du soleil, et alors la différentielle $\mathrm{d}R$ qui ne se rapporte qu'aux coordonnées de la lune, devient

$$\mathrm{d}R = -(3-2g-c).ndt.H.\sin.(3nt-3n't+3c'n't-2gnt-cnt+2\theta+\varpi-3\varpi').$$

La double intégrale $3a\int\int ndt.\mathrm{d}R$ acquiert le diviseur

$$(3-3m+3c'm-2g-c)^2,$$

m étant par le n°. 4 égal à $\frac{n'}{n}$; mais elle a pour facteur, $3-2g-c$, qui est à très-peu-près égal à $3-3m+3c'm-2g-c$; ainsi elle doit être considérée comme n'ayant que le diviseur $3-3m+3c'm-2g-c$, ce qui ne paroît pas suffire pour la rendre sensible. Si le terme précédent de l'expression de R résulte du carré de la force perturbatrice, c'est-à-dire, de la substitution des termes de r et de v, dépendans de cette force; alors les coordonnées de la lune renferment les angles $n't$ et $c'n't$. Supposons, par exemple, que la partie $-2n't$ de l'angle $-3n't$ dans ce terme de R, dépende des coordonnées de la lune; on a dans ce cas

$$\mathrm{d}R = -(3-2m-2g-c)$$
$$\times Hndt.\sin.(3nt-3n't+3c'n't-2gnt-cnt+2\theta+\varpi-3\varpi'),$$

et le terme $3a.\int\int ndt.dR$ donne dans l'expression de la longitude de la lune, le suivant,

$$\frac{3a.(3-2m-2g-c).n^2H.\sin.(3nt-3n't+3c'n't-2gnt-cnt+2\theta+\varpi-3\varpi')}{(3-3m+3c'm-2g-c)^2},$$

qui peut devenir sensible par l'extrême petitesse de son diviseur. Les termes de ce genre sont en très-grand nombre, et il est difficile de les déterminer avec exactitude; mais il suffit d'être averti de la possibilité de l'inégalité qui en résulte, pour suivre sous ce point de vue, les observations. Cette inégalité doit être appliquée au moyen mouvement, et par conséquent à l'anomalie moyenne.

La théorie indique encore une inégalité dont la période est à très-peu-près la même que celle de l'inégalité précédente, et qui dépend de l'applatissement de la terre. On a vu dans le n°. 19, que l'expression de Q contient le terme

$$(\tfrac{1}{2}\alpha\varphi-\alpha\rho).\frac{D^2}{r^3}.(\mu^2-\tfrac{1}{3});$$

or on a par le même n°.

$$\mu=s.\cos.\lambda+\sqrt{1-ss}\ \sin.\lambda.\sin.f v;$$

de plus on a

$$r=\frac{\sqrt{1+ss}}{u};$$

ce qui donne dans Q ou dans $-R$, la fonction

$$(\tfrac{1}{2}\alpha\varphi-\alpha\rho).\frac{D^2}{2}.u^3.(1-\tfrac{5}{2}s^2).\sin.^2\lambda.\cos.2fv.$$

Cette fonction produit par son développement, des termes dépendans de l'angle

$$2fnt+nt-n't+c'nt-2gnt-cnt+2\theta+\varpi-\varpi';$$

ils sont analogues à ceux que donne la fonction R, relative à l'action du soleil, et qui dépendent de l'angle

$$3nt-3n't+3c'mt-2gnt-cnt+2\theta+\varpi-3\varpi';$$

le coëfficient du temps t est à très-peu-près le même dans ces deux angles qui, maintenant, vu la position du périgée solaire, diffèrent peu de 200 degrés. Tous les termes de R se rapportant ici aux seules coordonnées de la lune; si l'on représente par

$$K.\sin.(2fnt+nt-n't-c'nt-2gnt-cnt+2\theta+\varpi-\varpi'),$$

le terme dépendant de l'angle précédent, que donne le développe-

ment de R; ce terme acquerra dans la différentielle $\mathrm{d}R$, le facteur $(2f+1-m+c'm-2g-c).n$; et par conséquent, il n'aura pour diviseur, dans la double intégrale $3a.\int\int ndt.\mathrm{d}R$, que la première puissance, et non le carré de cette quantité; l'inégalité correspondante à ce terme, ne paroît donc pas devoir être sensible.

Le terme de la forme $Y^{(3)}$ qui, comme on l'a vu dans le troisième livre, peut exister dans l'expression du rayon vecteur du sphéroïde terrestre, peut encore introduire dans l'expression de la longitude vraie de la lune, une inégalité dépendante du cosinus de $3fnt-2gnt-cnt+2\theta+\varpi$, et qui, maintenant se confond à-peu-près avec les deux précédentes. Si cette inégalité devenoit sensible, il en résulteroit de nouvelles lumières sur la figure de la terre; mais quelques calculs que j'ai faits sur cet objet, me portent à croire que cette inégalité est insensible, comme la précédente. La suite des siècles, et de nouveaux progrès dans l'analyse, éclairciront ce point délicat et important de la théorie lunaire.

28. Nous allons maintenant établir par les observations, l'existence de l'inégalité dépendante du sinus de l'angle $3nt-3n't+3c'n't-2gnt-cnt+2\theta+\varpi-3\varpi'$. Cet angle est évidemment le double de la longitude du nœud de l'orbite lunaire, plus la longitude de son périgée, moins trois fois la longitude du périgée du soleil; nous le désignerons par E, et nous allons faire voir que la loi des variations de sin. E, est la même que celle des anomalies observées dans le moyen mouvement de la lune.

Les tables lunaires insérées dans la troisième édition de l'Astronomie de Lalande, supposent que dans l'intervalle de cent années juliennes, le mouvement de la lune par rapport aux équinoxes, surpasse un nombre entier de circonférences, de 342°,09629; et que l'époque de 1750, est de 209°,20820. La correction de l'époque de ces tables pour 1691, a été déterminée par Bouvard et Burg, au moyen de plus de deux cents observations de la Hire et de Flamsteed; ils ont trouvé l'un et l'autre cette correction égale à $-13'',58$.

La correction de l'époque des mêmes tables pour 1756, a été déterminée par Mason et Bouvard, au moyen d'un très-grand nombre d'observations de Bradley, et ils l'ont trouvée nulle.

Ainsi, dans l'intervalle de 1691 à 1756, le moyen mouvement de la lune a été de 13″,58 plus grand que par ces tables; ce qui donne 20″,9 pour l'accroissement du moyen mouvement séculaire des mêmes tables.

Burg a trouvé par un grand nombre d'observations de Maskeline, la correction de l'époque de ces tables, égale à — 9″,26 pour 1766, et égale à —28″,09 pour 1779.

Bouvard a trouvé par un grand nombre d'observations de Maskeline, — 54″,32 pour la correction de l'époque de ces tables en 1789.

Enfin, par un nombre considérable d'observations faites à Greenvick, à Paris et à Gotha, on trouve — 87″,96 pour la correction des époques des mêmes tables en 1801.

De-là, il suit que depuis 1756 jusqu'à ce jour, le moyen mouvement de la lune a diminué d'une manière sensible, et que cette diminution est maintenant croissante; car de 1756 à 1779, c'est-à-dire, dans un intervalle de vingt-trois ans, ce mouvement a été plus petit que par les tables, de 28″,09; et de 1779 à 1801, c'est-à-dire, en vingt-deux ans, il a été plus petit de 59″,97. L'époque de 1756, comparée à celle de 1779, donne 126″ pour la diminution du mouvement séculaire des tables, tandis que l'époque de 1756 à 1801, donne 172″,5 pour cette diminution. L'ensemble des observations indique donc évidemment ces trois résultats; 1°. un mouvement moyen plus grand que celui de ces tables, depuis 1691 jusqu'en 1756; 2°. un mouvement moyen plus petit, depuis 1756 jusqu'à ce jour; 3°. une diminution de plus en plus rapide.

Ces résultats sont conformes à la marche de l'inégalité précédente; car à l'époque de 1691, le sinus de E étoit négatif; il étoit positif en 1756; cette inégalité a donc augmenté dans cet intervalle, le moyen mouvement de la lune. En 1756, ce sinus étoit positif et vers son *maximum*, et depuis cette époque, il a toujours été en diminuant; l'inégalité a donc diminué le moyen mouvement de la lune. Enfin ce sinus étoit presque nul en 1801, et alors sa diminution est la plus grande; la diminution du moyen mouvement a dû par conséquent être plus considérable dans ces dernières années.

Déterminons présentement le coëfficient de cette inégalité. Il est visible qu'elle doit produire un changement, soit dans l'époque des tables pour 1750, soit dans le moyen mouvement séculaire de ces tables. Nommons ε la correction de l'époque des tables en 1750 ; x la diminution de leur moyen mouvement séculaire, et y le coëfficient de l'inégalité précédente. La formule de correction des époques des tables, sera en nommant i le nombre des siècles écoulés depuis 1750,

$$\varepsilon - x.\,i + y.\sin.E.$$

Pour déterminer les trois inconnues ε, x et y, j'ai comparé cette formule aux trois époques de 1691, 1756 et 1801, déterminées par les observations ; ce qui m'a donné les trois équations suivantes,

$$\varepsilon + x.0{,}59 - y.0{,}63660 = -13'',58;$$
$$\varepsilon - x.0{,}06 + y.0{,}99898 = 0;$$
$$\varepsilon - x.0{,}51 + y.0{,}08199 = -87'',96.$$

Ces trois équations donnent

$$\varepsilon = -41'',54;$$
$$x = -98'',654;$$
$$y = 47'',51.$$

Au moyen de ces valeurs, on trouve $-13'',58$; $+0'',00$; $-11'',64$; $-35'',03$; $-57'',62$, et $-87'',96$, pour les corrections des six époques de 1691, 1756, 1766, 1779, 1789 et 1801. La somme de ces six corrections est $-205'',83$; et la somme des six corrections déterminées par les observations, est $-193'',21$; l'ensemble de ces corrections indique par conséquent qu'il faut augmenter de $+2'',10$, la valeur précédente de ε, et alors la formule de correction des tables devient

$$-39'',44 - 98'',654.i + 47'',51.\sin.E.$$

En calculant par cette formule, les corrections pour les six époques; on a

Corrections des tables par les observations.		Corrections par la formule.	Excès de ces correct. sur les premières.
1691. . . .	$-13'',58$.	$-11'',48$.	$+2'',10$;
1756. . . .	$+0'',00$.	$+2'',10$.	$+2'',10$;

	Corrections des tables par les observations.	Corrections par la formule.	Excès de ces correct. sur les premières.
1766.	— 9″,26.	— 9″,54.	— 0″,28;
1779.	— 28″,09.	— 32″,93.	— 4″,84;
1789.	— 54″,32.	— 55″,52.	— 1″,20;
1801.	— 87″,96.	— 85″,86.	+ 2″,10.

Les différences entre les résultats des observations et ceux de la formule, sont dans les limites des erreurs dont ces derniers résultats sont susceptibles : elles peuvent dépendre en partie de la formule elle-même que l'on rectifiera par de nouvelles observations.

CHAPITRE VI.

Des variations séculaires des mouvemens de la lune et de la terre, qui peuvent être produites par la résistance d'un fluide éthéré répandu autour du soleil.

29. Il est possible qu'il y ait autour du soleil, un fluide extrêmement rare qui altère les moyens mouvemens des planètes et des satellites; il est donc intéressant de connoître son influence sur les mouvemens de la lune et de la terre. Pour la déterminer, nommons x, y, z, les coordonnées de la lune, rapportées au centre de gravité de la terre; et x', y', z', celles de la terre, rapportées au centre du soleil. La vîtesse absolue de la lune autour du soleil, sera

$$\frac{\sqrt{(dx'+dx)^2+(dy'+dy)^2+(dz'+dz)^2}}{dt}.$$

Supposons la résistance que la lune éprouve, égale au carré de cette vîtesse, multiplié par un coëfficient K qui dépend de la densité de l'éther, de la surface et de la densité de la luue. En la décomposant parallèlement aux axes des x, des y et des z; elle produit les trois forces suivantes,

$$-\frac{K.(dx'+dx)}{dt^2}.\sqrt{(dx'+dx)^2+(dy'+dy)^2+(dz'+dz)^2};$$

$$-\frac{K.(dy'+dy)}{dt^2}.\sqrt{(dx'+dx)^2+(dy'+dy)^2+(dz'+dz)^2};$$

$$-\frac{K.(dz'+dz)}{dt^2}.\sqrt{(dx'+dx)^2+(dy'+dy)^2+(dz'+dz)^2}.$$

Mais la terre étant supposée immobile, dans la théorie lunaire; il faut transporter en sens contraire à la lune, la résistance qu'elle éprouve, et qui décomposée parallèlement aux mêmes axes, donne les trois forces

$$-K'.\frac{dx'}{dt^2}.\sqrt{dx'^2+dy'^2+dz'^2};$$

$$-K'.\frac{dy'}{dt^2}.\sqrt{dx'^2+dy'^2+dz'^2};$$

$$-K'.\frac{dz'}{dt^2}.\sqrt{dx'^2+dy'^2+dz'^2};$$

K' étant un coëfficient différent de K, et qui dépend de la résistance éprouvée par la terre. Ayant donc représenté par $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$, $\left(\frac{dQ}{dy}\right)$ et $\left(\frac{dQ}{dz}\right)$, les forces qui sollicitent la lune parallèlement aux axes des x, des y et des z; on aura en n'ayant égard qu'aux forces précédentes,

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = K'.\frac{dx'}{dt^2}.\sqrt{dx'^2+dy'^2+dz'^2}$$
$$-K.\frac{(dx'+dx)}{dt^2}.\sqrt{(dx'+dx)^2+(dy'+dy)^2+(dz'+dz)^2};$$

$$\left(\frac{dQ}{dy}\right) = K'.\frac{dy'}{dt^2}.\sqrt{dx'^2+dy'^2+dz'^2}$$
$$-K.\frac{(dy'+dy)}{dt^2}.\sqrt{(dx'+dx)^2+(dy'+dy)^2+(dz'+dz)^2};$$

$$\left(\frac{dQ}{dz}\right) = K'.\frac{dz'}{dt^2}.\sqrt{dx'^2+dy'^2+dz'^2}$$
$$-K.\frac{(dz'+dz)}{dt^2}.\sqrt{(dx'+dx)^2+(dy'+dy)^2+(dz'+dz)^2}.$$

Maintenant on a, en ne faisant varier que les coordonnées de la lune,

$$dQ = dx.\left(\frac{dQ}{dx}\right)+dy.\left(\frac{dQ}{dy}\right)+dz.\left(\frac{dQ}{dz}\right).$$

En substituant pour x, y, z, leurs valeurs $\frac{\cos. v}{u}$, $\frac{\sin. v}{u}$, $\frac{s}{u}$, données dans le n°. 2; on aura

$$dQ = -\frac{du}{u^2}.\left\{\cos. v.\left(\frac{dQ}{dx}\right)+\sin. v.\left(\frac{dQ}{dy}\right)+s.\left(\frac{dQ}{dz}\right)\right\}$$
$$-\frac{dv}{u}.\left\{\sin. v.\left(\frac{dQ}{dx}\right)-\cos. v.\left(\frac{dQ}{dy}\right)\right\}$$
$$+\frac{ds}{u}.\left(\frac{dQ}{dz}\right);$$

or on a

$$dQ = \left(\frac{dQ}{du}\right).du + \left(\frac{dQ}{dv}\right).dv + \left(\frac{dQ}{ds}\right).ds\,;$$

en comparant ces deux valeurs de dQ, on aura

$$\left(\frac{dQ}{du}\right) = -\frac{1}{u^2}.\left\{\cos.v.\left(\frac{dQ}{dx}\right) + \sin.v.\left(\frac{dQ}{dy}\right) + s.\left(\frac{dQ}{dz}\right)\right\};$$

$$\left(\frac{dQ}{dv}\right) = -\frac{1}{u}.\left\{\sin.v.\left(\frac{dQ}{dx}\right) - \cos.v.\left(\frac{dQ}{dy}\right)\right\};$$

$$\left(\frac{dQ}{ds}\right) = \frac{1}{u}.\left(\frac{dQ}{dz}\right);$$

d'où l'on tire,

$$-\left(\frac{dQ}{du}\right) - \frac{s}{u}.\left(\frac{dQ}{ds}\right) = \frac{1}{u^2}.\left\{\cos.v.\left(\frac{dQ}{dx}\right) + \sin.v.\left(\frac{dQ}{dy}\right)\right\}.$$

On a par le n°. 2,

$$x' = \frac{\cos.v'}{u'}\,; \quad y' = \frac{\sin.v'}{u'}\,; \quad z' = \frac{s'}{u'}\,;$$

v' étant ici la longitude de la terre vue du soleil. Si l'on prend pour plan fixe, celui de l'écliptique en 1750; on pourra supposer $s' = 0$. Représentons par $r'dq'$, le petit arc décrit par la terre dans l'instant dt, et qui est égal à $\sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}$; cet arc est à celui que la lune décrit par son mouvement relatif autour de la terre, à très-peu-près dans le rapport de $\frac{a'm}{a}$ à l'unité, et par conséquent, trente fois au moins plus considérable : on a donc à fort peu-près,

$$\sqrt{(dx'+dx)^2 + (dy'+dy)^2 + (dz'+dz)^2} = r'dq' + \frac{dx'.dx}{r'dq'} + \frac{dy'.dy}{r'dq'}.$$

Si l'on néglige l'excentricité de l'orbe terrestre, on a $dq' = mdt$, le temps t étant représenté par le moyen mouvement de la lune. On a ensuite,

$$\frac{dx'}{r'dq'} = -\sin.v'\,; \quad \frac{dy'}{r'dq'} = \cos.v'\,;$$

et par conséquent,

$$\sqrt{(dx'+dx)^2 + (dy'+dy)^2 + (dz'+dz)^2} = ma'dt - dx.\sin.v' + dy.\cos.v'.$$

De-là, il est facile de conclure

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right)=\frac{(K-K').m^2.\sin.v'}{u'^2}-\frac{3K.m}{2u'}.\frac{dx}{dt}+\frac{Km}{2u'}.\frac{dx}{dt}.\cos.2v'+\frac{Km}{2u'}.\frac{dy}{dt}.\sin.2v';$$

$$\left(\frac{dQ}{dy}\right)=\frac{(K'-K).m^2.\cos.v'}{u'^2}-\frac{3K.m}{2u'}.\frac{dy}{dt}+\frac{Km}{2u'}.\frac{dx}{dt}\sin.2v'-\frac{Km}{2u'}.\frac{dy}{dt}.\cos.2v';$$

$$\left(\frac{dQ}{dz}\right)=-\frac{Km}{u'}.\frac{dz}{dt};$$

et par conséquent, en substituant pour x et y leurs valeurs, et négligeant le carré de l'excentricité de l'orbe lunaire,

$$-\left(\frac{dQ}{du}\right)-\frac{s}{u}.\left(\frac{dQ}{ds}\right)=\frac{(K'-K).m^2.\sin.(v-v')}{u^2.u'^2}+\frac{3Km.du}{2u^4.u'}$$
$$-\frac{Km}{2u^3.u'}.\frac{dv}{dt}.\sin.(2v-2v')-\frac{Km}{2u^4.u'}.\frac{du}{dt}.\cos.(2v-2v');$$

$$\left(\frac{dQ}{dv}\right).\frac{dv}{u^2}=\frac{(K'-K).m^2.dv}{u'^2.u^3}.\cos.(v-v')-\frac{3Km}{2u'.u^4}.dv.\frac{dv}{dt}$$
$$-\frac{Km}{2u'.u^4}.dv.\frac{dv}{dt}.\cos.(2v-2v')+\frac{Km}{2u'.u^5}.dv.\frac{du}{dt}.\sin.(2v-2v');$$

$$\left(\frac{dQ}{dv}\right).\frac{du}{u^2dv}=\frac{(K'-K).m^2}{u'^2.u^3}.\frac{du}{dv}.\cos.(v-v')-\frac{3Km}{2u'.u^4}.\frac{du}{dv}$$
$$-\frac{Km}{2u'.u^4}.\frac{du}{dv}.\cos.(2v-2v').$$

La valeur de K n'est pas constante : si l'on suppose la densité de l'éther, proportionnelle à une fonction de la distance au soleil; en désignant par $\varphi(u')$ cette fonction, elle sera relativement à la lune pour laquelle u' devient $u'-\frac{u'^2}{u}.\cos.(v-v')$,

$$\varphi(u')-\frac{u'^2}{u}.\varphi'(u').\cos.(v-v'),$$

$\varphi'(u')$ étant la différentielle de $\varphi(u')$, divisée par du'; ainsi, l'on pourra supposer

$$K=H.\varphi(u')-\frac{H.u'^2}{u}.\varphi'(u').\cos.(v-v').$$

Cela posé, si l'on néglige les quantités périodiques autres que les sinus et cosinus de $cv-\varpi$, on aura

$$\left(\frac{dQ}{dv}\right).\frac{dv}{u^2}=\frac{H.m^2dv}{2u^4}.\varphi'(u')-\frac{3Hm}{2u'.u^4}.\varphi(u').dv.\frac{dv}{dt}.$$

En substituant $\frac{1}{a}.\{1+e.\cos.(cv-\varpi)\}$ pour u, et $dv.\{1-2e.\cos.(cv-\varpi)\}$ pour dt; on aura

$$\int\left(\frac{dQ}{dv}\right).\frac{dv}{u^2}=-\tfrac{1}{2}.H.m.a^4.v.\left\{\frac{3.\varphi(u')}{u'}-m.\varphi'(u')\right\}$$
$$+Hm.a^4.\left\{\frac{3}{u'}.\varphi(u')-2\,m.\varphi'(u')\right\}.e.\sin.(cv-\varpi).$$

On aura ensuite

$$-\left(\frac{dQ}{du}\right)-\frac{s}{u}.\left(\frac{dQ}{ds}\right)=-\tfrac{3}{2}.Hma^3.\frac{\varphi(u')}{u'}.e.\sin.(cv-\varpi);$$
$$\left(\frac{dQ}{dv}\right).\frac{du}{u^2.dv}=\frac{Hm}{2}.a^3.\left\{\frac{3.\varphi(u')}{u'}-m.\varphi'(u')\right\}.e.\sin.(cv-\varpi).$$

Soit donc

$$\alpha=H.m.a^3.\left\{\frac{3.\varphi(u')}{u'}-m.\varphi'(u')\right\};$$
$$\mathcal{C}=H.m.a^3.\left\{\frac{6.\varphi(u')}{u'}-\tfrac{9}{2}.m.\varphi'(u')\right\};$$

il faudra ajouter au second membre de la seconde des équations (L) du n°. 1, et par conséquent au second membre de l'équation (L') du n°. 9, la fonction

$$-\frac{\alpha v}{a_{,}}+\mathcal{C}.\frac{e}{a_{,}}.\sin.(cv-\varpi).$$

La valeur de $\frac{1}{a}$ sera ainsi par le n°. 10, augmentée de la quantité $\frac{\alpha v}{a_{,}}$, et conséquemment la valeur de a sera diminuée de $\alpha a_{,}.v$; on aura ensuite à très-peu-près, par le même n°.,

$$\frac{-2.d.\frac{e}{a}}{dv}+\mathcal{C}.\frac{e}{a_{,}}=0;$$

ce qui donne

$$\frac{e}{a}=\text{constante}.\{1+\tfrac{1}{2}\mathcal{C}v\};$$

et par conséquent,

$$e=\text{constante}.\{1-(\alpha-\tfrac{1}{2}\mathcal{C}).v\}.$$

Le rapport de l'excentricité au demi-grand axe, est donc assujetti par la résistance de l'éther, à une équation séculaire; mais elle est insensible par rapport à l'accélération correspondante du moyen mouvement de la lune, parce que cette dernière accélération est, comme on va le voir, multipliée par le carré de v. Cette résistance ne produit aucune équation séculaire dans le mouvement du périgée.

L'expression de dt du n°. 15, donne dans l'expression de $t+\varepsilon$, la fonction

$$-\tfrac{3}{4}.\alpha v^2+(5\alpha-6).v.e.\sin.(cv-\varpi).$$

En substituant au lieu de v, $t+\varepsilon+2e.\sin.(ct-\varpi)$, on aura dans l'expression de v, l'équation séculaire,

$$\tfrac{3}{4}\alpha.t^2-(2\alpha-6).t.e.\sin.(ct-\varpi).$$

La résistance de l'éther produit donc dans le moyen mouvement de la lune, une équation séculaire qui accélère ce moyen mouvement, sans en produire aucune sur le mouvement du périgée.

On s'assurera de la même manière, que la résistance de l'éther ne produit aucune équation séculaire sensible, ni dans le mouvement des nœuds, ni dans l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique.

De-là il suit que la résistance de l'éther ne peut être sensible que dans le moyen mouvement de la lune. Les observations anciennes et modernes prouvent évidemment que les moyens mouvemens de son périgée et de ses nœuds, sont assujettis à des équations séculaires très-sensibles. Le mouvement séculaire du périgée conclu par la comparaison des observations anciennes et modernes, est plus petit de quinze à seize minutes, que celui qui résulte de la comparaison des observations faites depuis un siècle; ce phénomène incontestable indique donc une autre cause que la résistance de l'éther. On a vu précédemment qu'il dépend de la variation de l'excentricité de l'orbe terrestre; et comme les équations séculaires résultantes de cette variation satisfont exactement à l'ensemble de toutes les observations anciennes et modernes, on doit en conclure que l'accélération produite par la résistance d'un fluide éthéré, dans le moyen mouvement de la lune, est jusqu'à présent insensible.

30. L'accélération produite par cette résistance dans le moyen mouvement de la terre, est beaucoup plus petite que l'accélération correspondante du moyen mouvement de la lune. Pour le faire voir, reprenons la formule (Y) du n°. 46 du second livre. Cette formule appliquée à la terre, donne dans l'expression de $\delta v'$, le terme

$$-\frac{3a}{S}.\int\int dv'.d'Q';$$

S étant la masse du soleil, la somme des masses de la terre et de la lune étant prise pour unité; Q' correspondant pour la terre, à ce que nous avons désigné par Q, pour la lune; et la caractéristique différentielle d' se rapportant aux coordonnées du soleil. On a

$$d'Q = \left(\frac{dQ'}{dx'}\right).dx' + \left(\frac{dQ'}{dy'}\right).dy' + \left(\frac{dQ'}{dz'}\right).dz';$$

$\left(\frac{dQ'}{dx'}\right)$, $\left(\frac{dQ'}{dy'}\right)$ et $\left(\frac{dQ'}{dz'}\right)$ étant les forces dont la terre est animée parallèlement aux axes des x', des y' et des z', en vertu de la résistance de l'éther. Ces forces sont par le n°. précédent, en négligeant l'excentricité de l'orbe terrestre, et en représentant l'élément dt du temps, par la différentielle du moyen mouvement lunaire,

$$K'.a'^2.m^2.\sin.v'; \quad -K'.a'^2.m^2.\cos.v'; \quad -K'.a'^2.m.\frac{ds'}{dt};$$

en négligeant donc le carré de $\frac{ds'}{dt}$, on aura

$$d'Q' = -K'.a'^3.m^3.dt;$$

ce qui donne

$$\frac{-3a'}{S}.\int\int dv'.d'Q' = \frac{3}{2}.\frac{K'.a'^4.m^4.t^2}{S}.$$

K' doit être supposé égal à $H'.\varphi(u')$, H' étant une constante dépendante de la surface et de la masse de la terre; ainsi l'équation séculaire produite par la résistance de l'éther, dans le moyen mouvement de la terre, est

$$\frac{\frac{3}{2}.H'.a'^4.m^4.t^2.\varphi(u')}{S}.$$

L'accélération correspondante du moyen mouvement de la lune, est par ce qui précède,

$$\tfrac{3}{4}.H.a^3.a'.mt^2.\{3.\varphi(u') - \frac{m}{a'}.\varphi'(u')\}.$$

De plus, on a $\frac{S.a^3}{a'^3} = m^2$; l'accélération du moyen mouvement de la lune, est donc à l'accélération correspondante du moyen mouvement de la terre, comme l'unité est à

$$\frac{2H'.m.\varphi(u')}{H.\{3.\varphi(u') - \frac{m}{a'}.\varphi'(u')\}};$$

et conséquemment, comme l'unité est à $\frac{2}{3}.\frac{H'm}{H}$, en négligeant le terme $-\frac{m}{a'}.\varphi'(u')$. Il est facile de voir que

$$\frac{H'}{H} = \frac{\text{masse de la lune.}}{\text{masse de la terre.}} \cdot \frac{\text{carré de la parallaxe lunaire.}}{\text{carré du demi-diamètre apparent de la lune.}}$$

Les observations donnent

demi-diamètre apparent de la lune $= 2911''$;
parallaxe lunaire $= 10661''$;

et par le n°. 44 du sixième livre, la masse de la lune est $\frac{1}{68,5}$ de celle de la terre; on aura ainsi,

$$\frac{H'}{H} = 0,195804;$$

d'où il suit que l'accélération du moyen mouvement de la terre, produite par la résistance de l'éther, est égale à l'accélération correspondante du moyen mouvement de la lune, multipliée par 0,0097642, ou environ cent fois plus petite que cette accélération.

FIN DU TOME TROISIÈME.

ERRATA.

PAGE 42, ligne 6, au lieu de $a'\sqrt{a}$; *lisez* $a\sqrt{a'}$.

Page 61, ligne 9, au lieu de $m' = \frac{1}{383137}$; *lisez* $m' = \frac{1}{383130}$.

Page 71, dernière lig., au lieu de $b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = -0,6722632151$; *lis.* $b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = -0,67226315$.

Page 85, ligne 4, au lieu de $\frac{d^2 b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 3,377102$; *lisez* $\frac{d^2 b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 2,377102$.

Page 88, ligne 9, au lieu de $(1 = \mu^{v})$; *lisez* $(1 + \mu^{v})$.

Page 89, ligne dernière, au lieu de $+ 0'',020413 . \mu^{v}$; *lisez* $+ 0'',020413 . \mu^{vi}$.

Page 96, ligne 2, au lieu de au-dessous; *lisez* au-dessus.

Page 121, première ligne, au lieu de sin. $2(nt^{vi} - n^{iv}t + \varepsilon^{vi} - \varepsilon^{iv})$; lisez sin. $(n^{vi}t - n^{iv}t + \varepsilon^{vi} - \varepsilon^{iv})$.

Page 122, ligne 18; *changez* ϖ en ϖ^{v}.

Page 133, ligne 7, à compter d'en bas, au lieu de Π^{vi}; *lisez* Π^{iv}.

Page 141, ligne 4, au lieu de K'; lisez $e^{v}K'$.

Page 143, ligne 8, au lieu de $\gamma . \frac{\gamma \delta \Pi}{t}$; lisez $\frac{\gamma \delta \Pi}{t}$.

Page 146, ligne 6, avant ces mots, la dernière de ces inégalités; *ajoutez* la première de ces inégalités doit être appliquée au moyen mouvement de la planète, à cause de la longueur de sa période.

Page 155, ligne 3, au lieu de (0,1); *lisez* (1,0).

Page 158, ligne 3 et ligne 7, au lieu de 26°,0776; *lisez* 26°,0796.

Page 181, ligne 10 à compter d'en bas, au lieu de $\frac{1}{r}$; lisez $\frac{M+m}{r}$.

Page 198, ligne 9, au lieu de $2gv + 2v - 2m - 2\theta$; *lisez* $2gv + 2v - 2mv - 2\theta$.

Page 211, ligne 2, au lieu de $+ \frac{2m - 2g}{4}$; lisez $\frac{3 + 2m - 2g}{4}$.

Ibid. ligne 7, au lieu de $- \frac{3.(1-m)}{3-2m}$; lisez $+ \frac{3.(1-m)}{3-2m}$.

Page 225, ligne 7, au lieu de $- 2A_{,}^{(4)}$; *lisez* $- 2A_{,}^{(1)}$.

Page 264, ligne 16, au lieu de $1 - \frac{3}{2}m^2 - (1-m)^2 . \nu$; lisez $1 - \frac{3}{2}m^2 - (1-m)^2$.

